14. ВЕРОЯТНОСТИ. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

План:
1. Вероятности
2. **Теоремы сложения и умножения вероятностей**
3. Предельные теоремы

Ключевые слова и словосочетания: *событие, случайное событие, достоверное и невозможные события, несовместные события, равновозможные события, массовые или статистические случайные события, опыт (эксперимент, испытание), воспроизводимый опыт, наблюдаемый результат, пространство (множество) элементарных исходов, поле событий, элементарный исход, операция суммы, произведения событий, противоположное событие, алгеброй событий, классическое определение, классическая схема или схема урн, факториалом натурального числа, упорядоченное множество, размещения, перестановки, сочетания, статистическое определение вероятности, геометрическая вероятность.*

Аксиомы теории вероятностей, независимость (зависимость) одного события от другого, теорема сложения вероятностей, теорема умножения вероятностей, попарно независимость событий, независимость событий в совокупности, полная группа событий, теорема о полной вероятности, теорема гипотез или Байеса.

Последовательность независимых испытаний, схема Бернулли, формула Бернулли, наивероятнейшее число, локальная теорема Муавра–Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа, правило «трёх сигм», практически достоверные события, теорема Пуассона.

1.1. Случайные события и предмет теории вероятностей

Каждая математическая дисциплина, в том числе теория вероятностей, отражает свойства реального мира. В каждой математической дисциплине есть свои основные понятия, связанные с предметом изучения. Эти понятия происходят из явлений и фактов окружающей нас действительности.

Начнем с описания тех явлений и фактов, которые лежат в основе понятия «случайное событие». Это описание еще не является математическим определением, однако оно заключает в себе некоторые свойства реального мира, изучение которых математическими методами и является содержанием теории вероятностей.

При неоднократном воспроизведении одного и того же опыта результаты его могут изменяться от случая к случаю.

Так, в результате подбрасывания монеты может оказаться, что она падет либо гербом вверх («герб»), либо гербом вниз («цифра»).

При бросании игральной кости на верхней ее грани может появиться одно из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Если из большого количества произведенных изделий выбрать наудачу одно, то такое изделие может оказаться либо стандартным, либо бракованным.

Всякой электролампе можно поставить в соответствие некоторое число - количество часов работы до момента перегорания.

В каждом из перечисленных выше примеров рассмотрен некоторый опыт (эксперимент, испытание), исход которого заранее предвидеть невозможно.

Определение 1. Некоторое событие называют *случайным* по отношению к данному опыту, если в результате опыта оно может появиться или не появиться.

Примеры. Следующие события являются случайными:

1. Событие, состоящее в том, что при бросании монеты выпадет герб (решетка).
2. Событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадет четное число очков.
3. Событие, состоящее в том, что наудачу выбранное изделие окажется бракованным.
4. Событие, состоящее в том, что электролампа будет гореть не менее трех часов.

Можно говорить о таких случайных событиях, как поражение мишени, выигрыш в лотерею, наличие сильных помех при радиоприеме и др.

Случайные события обозначаются в дальнейшем латинскими прописными буквами A, B, C и т.д.

Виды случайных событий. Сделаем сразу же одно замечание. Согласно данному выше определению, событие считается случайным, если его наступление в результате опыта представляет собой лишь одну из возможностей. Под это определение формально подходят и такие события, которые в результате данного опыта обязательно наступают; эти события называют *достоверными.* Например, достоверным является событие, состоящее в том, что при бросании игральной кости выпадает целое число очков или что выбранное наугад слово из данной лекции содержит не более 50 букв. И так, достоверное событие можно рассматривать как одну из разновидностей случайного события. Оно обозначается символом Ω (омега).

Аналогичное замечание относится и к *невозможным* событиям, т.е. таким которые никогда не наступает при осуществлении данного опыта. Невозможное событие тоже можно рассматривать как случайное. Примером невозможного события может служить получение двух выигрышей по одному билету. Невозможное событие обозначается символом пустое множество $\varnothing$.

Определение 2. События называют *несовместными,* если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Комментарий к определению 2. Несовместные события не могут появиться в результате одного опыта.

Можно говорить о нескольких несовместных событиях $A_1, A_2, ..., A_n$; в этом случае имеют в виду, что события $A_1, A_2, ..., A_n$, не могут наступить все сразу в результате одного испытания. Если в множестве $A_1, A_2, ..., A_n$ событий каждые два несовместны, то говорят, что эти события *попарно несовместны.*

Например, при бросании игральной кости события A «выпадет количество очков, равное 1 или 2» и B «выпадет количество очков, равное 4 или 5» несовместны.

Определение 3. События называют *равновозможными,* если есть основания считать, что ни одно из этих событий не является более возможными, чем другие.

В дальнейшем нас будут интересовать только такие опыты, которые можно повторить (в принципе) неограниченное число раз; именно такое характер носит опыт с бросанием монеты, с покупкой лотерейного билета, с обследованием изделия на годность или брак. Любое случайное событие, наступление которого возможно в такого рода опытах, называется *массовым* или *статистическим.*

Массовые случайные события следует отличать от единичных, исключительных, обладающих той особенностью, что опыт, с которым связаны эти события, принципиально невоспроизводим. Например «1 сентября 2017 года в Ташкенте шел дождь» является исключительным, так как воспроизвести наступление указанного дня невозможно. В то же время события «1 сентября в Ташкенте шел дождь» (без упоминания о годе) является, несомненно, массовым: ведь наблюдать погоду в Ташкенте 1 сентября в течение многих лет.

Теперь мы в состоянии ответить на вопрос, с которого, собственно, и должно начинаться знакомство с теорией вероятностей: чем занимается, какие задачи ставит перед собой эта дисциплина? В самых общих словах предмет теория вероятностей может быть определен следующим образом.

Теория вероятностей занимается изучением закономерностей, присущих массовым случайным событиям.

Простейшие пример закономерности такого рода дает опыт с бросанием монеты. Предположим, что бросание производится много раз подряд. Исход каждого отдельного бросания является случайным, неопределенным. Однако средний *результат* большого числа бросания утрачивает случайный характер, становится закономерным. А именно: «доля» тех бросаний, при которых выпадает герб (т.е. отношение числа таких бросаний к числу всех бросаний) с увеличением числа бросаний приближается к $1/2$.

Это некоторый предварительный, интуитивный подход к понятию «случайное событие». Он базируется на совершенно естественных, но вместе с тем не вполне строгих рассуждениях. Точный смысл основных понятий теории вероятностей связано с понятием пространства элементарных исходов (событий).

Строгое математическое понятие «случайного события» должно обобщать соответствующее обиходное понятие, т.е. отражать их существенные черты и в то же время быть безупречно точными. Точный смысл основного понятий теории вероятностей, в том числе понятия «случайного события» связано с понятием пространства элементарных исходов (событий).

1.2. **Элементарные события (исходы)**

Следует подчеркнуть, что всякий случайный опыт (эксперимент, испытание), состоит в осуществлении некоторого вполне определенного комплекса условий и наблюдении результата. ***Рассматриваются только такие опыты, которые можно повторять (воспроизводить) при неизменном комплексе условий произвольное число раз (по крайней мере, теоретически).***

Предметом наблюдения в том или ином опыте может быть некоторый процесс, физическое явление или действующая система. Для реально воспроизводимого опыта понятие «наблюдаемый результат» означает, что существует принципиальная возможность зарегистрировать данный результат опыта с помощью того или иного прибора (в простейшем случае, например, визуально). Любой наблюдаемый результат интерпретируется как случайный исход опыта ***(случайное событие).*** Событие может произойти, а может и не произойти в результате опыта.

При математической формализации модели опыта отправным пунктом является понятие ***пространства*** (***множества) элементарных исходов*** (обозначается Ω), связанного с данным опытом. Под этим понимают множество взаимоисключающих исходов такое, что результатом опыта всегда является один и только один исход. Любое подмножество данного множества Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое). Совокупность всех наблюдаемых событий составляет ***поле событий*** для данного опыта.

Говорят, что событие Aпоявилось (наступило, произошло, осуществилось, реализовалось), если результатом опыта является элементарный исход ω, принадлежащий A $(\omega \in A)$. Событие, совпадающее с пустым множеством $\varnothing$, называется- невозможным событием, а событие, совпадающее со всем множеством Ω - достоверным событием.

Два события A и B называются совместными (несовместными), если в результате опыта возможно (невозможно) их совместное осуществление. Другими словами, события A и B совместны, если соответствующие множества A и B имеют общие элементы, и несовместны в противном случае.

Множество Ω для данного опыта может быть дискретным, непрерывным или иметь более сложную структуру. К дискретным относятся конечные или счетные множества элементарных исходов. К непрерывным относятся множества типа континуума. Любой конечный или бесконечный промежуток числовой прямой является примером множества типа континуума. В дальнейшем мы рассматриваем только такие модели опытов, для которых множество элементарных исходов Ω либо дискретно, либо непрерывно.

Построение множества Ω (если оно не задано при описании опыта) осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного опыта могли быть однозначно описаны на основе построенного множества Ω. Другими словами, если нас интересуют события A, B, C и т. д., являющиеся наблюдаемыми событиями в данном опыте, то множество Ω должно состоять из таких исходов, чтобы существовали подмножества данного множества, равносильные событиям A, B, C и т.д.

Так как понятие «элементарный исход» строго не определяемо, то указанная задача допускает не единственное решение и зависит от набора интересующих нас событий. Если потребовать, чтобы правило однозначного описания выполнялось для всего поля событий, то в этом случае понятие элементарного исхода становится более определенным. Именно, в совокупности всех подмножеств множества Ω, составляющих поле событий, элементарные исходы являются одноэлементными подмножествами.

Пример 1. Опыт состоит в подбрасывании один раз правильной шестигранной игральной кости. Обозначим через X число очков, выпавших на верхней грани кости. Описать множество элементарных исходов Ω и указать состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A = \{X - \textit{кратно трем}\},\ \ B = \{X - \textit{нечетно}\},\ \ C = \{X > 3\},$$

$$D = \{X < 7\},\ E = \{X - \textit{дробно}\},\ \ F = \{0{,}5 < X < 1{,}5\}.$$

Выявить пары совместных событий.

Решение

Введем обозначения для следующих наблюдаемых в данном опыте событий:

$$\omega_k = \{X = k\},\ k = 1, 2, ..., 6;$$

$$\omega^{(1)} = \{X - \textit{нечетное число}\};\ \omega^{(2)} = \{X - \textit{четное число}\}.$$

На базе данных исходов можно сконструировать два достоверных события:

$$\Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\} \text{ и } \Omega_2 = \{\omega^{(1)}, \omega^{(2)}\}.$$

Какое из них больше подходит в качестве множества элементарных исходов? Ясно, что Ω_2 следует «забраковать», поскольку, например, наблюдаемые события $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6$, A, B, D, E не являются подмножествами множества Ω_2. С другой стороны, все перечисленные события могут быть описаны как подмножества множества Ω_1. Действительно,

$$A = \{\omega_3, \omega_6\},\ \ B = \omega^{(1)} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\},\ \ C = \{\omega_4, \omega_5, \omega_6\},$$

$$D = \Omega_1 = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6\},\ E = \varnothing,\ F = \{\omega_1\}.$$

Из написанных равенств, в частности, усматриваем, что исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$ разложимы на элементы, которые сами являются исходами данного опыта. Таким образом, исходы $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_6$ более «элементарны», чем исходы $\omega^{(1)}$ и $\omega^{(2)}$.

Сопоставляя попарно события и проверяя наличие общих элементов, находим пары совместных событий: A и B, A и C, A и D, B и C, B и D, B и F, C и D, D и F.

Пример 2. Опыт состоит в радиолокационном обнаружении воздушной цели. Наблюдаемый результат - положение светящегося пятна (отраженного импульса от цели) на экране индикатора цели, имеющего форму круга радиуса 10 см, в системе декартовых координат с началом, совпадающим с центром экрана. Описать множество элементарных исходов и состав подмножеств, соответствующих следующим событиям:

$$A = \{\text{цель находится в первом квадранте}\};$$

$$B = \left\{ \begin{matrix} \text{цель находится в круге радиуса } 5 \text{ см, центр} \\ \text{которого совпадает с центром экрана} \end{matrix} \right\};$$

$$C = \left\{ \begin{matrix} \text{цель находится в круге радиуса } 2{,}5 \text{ см, центр которого сдви} - \\ \text{нут на } 5 \text{ см вдлоль оси } Ox \text{ в отрицательном направлении} \end{matrix} \right\}.$$

Совместны ли пары событий A и B, A и C, B и C?

Решение

Все интересующие нас в данном опыте наблюдаемые события связаны с регистрацией положения светящегося пятна на экране индикатора, Удобной формой математического описания элементарного исхода являются в данном случае координаты случайной точки на плоскости, соответствующей, например, центру пятна (предполагается, что пятно представляет собой круг достаточно малого радиуса). Хотя очевидно, что точку (как абстрактное математическое понятие) наблюдать физически на экране индикатора невозможно, тем не менее такой идеализированный способ описания элементарного исхода упрощает математическую формализацию модели данного опыта.

Таким образом, множество Ω непрерывно и может быть записано в виде

$$\Omega = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100\}.$$

Подмножества, равносильные указанным событиям, имеют вид :

$$A = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100,\ x > 0,\ y > 0\};$$

$$B = \{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 25\};$$

$$C = \{(x, y):\ (x+5)^2 + y^2 \le 6{,}25\}.$$

По определению, события совместны, если соответствующие им подмножества имеют общие элементы (пересекаются), и несовместны в противном случае. Поэтому события A и B, B и C совместны, а события A и C несовместны.

Пример 3. Рассмотрим следующий случайный опыт: матч на первенство страны по футболу между командами «Пахтакор» и «Бунёдкор». Интересующие нас события:

$A=\{выграла\ \ команда\ \ "Пахтакор"\}$;

$B=\{игра\ \ закончилась\ \ победой\ \ одной\ \ из\ \ команд\}$;

$C=\{игра\ \ закончилась\ \ со\ \ счетом\ 3:1\ \ впользу\ \ "Бунёдкор"\}$;

$D=\{в\ \ игре\ \ забито\ \ неменьше\ \ трех\ \ голов\}$.

Требуется описать множество элементарных исходов и указать состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

Решение

Очевидно, что описанный опыт не удовлетворяет требованию воспроизводимости при неизменном комплексе условий, поскольку условия проведения матча меняются от игры к игре. Поэтому построение вероятностной модели исходов футбольного матча возможно лишь при определенной идеализации реальных условий. Предположим, что такая модель существует. Спрашивается, что представляет собой результат (элементарный исход) данного опыта? Ответ зависит от того, какой круг событий мы собираемся наблюдать (регистрировать) в данном опыте. События, перечисленные в условии задачи, определяют круг интересов обычного «болельщика» за ту или иную команду. Для полного и однозначного описания всех указанных событий достаточно принять в качестве элементарного исхода конечный счет в матче.

Запишем множество Ω следующим образом:

$$\Omega=\{\omega=(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0\},$$

где x - количество голов, забитых командой «Пахтакор», y - количество голов, забитых командой «Бунёдкор», $\mathbb{Z}_0$ - множество неотрицательных целых чисел.

Мы вынуждены считать множества возможных значений x и y, по крайней мере, теоретически - неограниченными, поскольку до игры нет никаких оснований для того, чтобы установить явную точную границу возможного счета. Практически, конечно, бесконечно большой счет ни в какой игре не осуществим.

Подмножества, соответствующие интересующим нас событиям, имеют следующий вид:

$$A=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x>y\},\qquad B=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x\neq y\},$$

$$C=\{(x,y):\ x=1,\ y=3\}=\{(1,3)\},\qquad D=\{(x,y):\ x\in\mathbb{Z}_0,\ y\in\mathbb{Z}_0,\ \ x+y\geq 3\}.$$

Заметим, что для другого «экспериментатора», - например, для тренера команды «Пахтакор» - может оказаться более важным предметом наблюдения не конечный счет матча, а количество травмированных или оштрафованных игроков. В этом случае придется строить другое множество элементарных исходов, а следовательно, и другую вероятностную модель футбольного матча.

Упражнения

В задачах 1- 6 простроить множество элементарных исходов Ω по описанию опыта и указанных подмножеств, соответствующие указанным событиям

1. Игральная кость подбрасывается дважды. Наблюдаемый результат - пара чисел, соответствующих числам очков, выпавших в первый и второй раз. События:

A = {оба раза выпало число очков, кратное трем},

B = {ни разу не выпало число шесть},

C = {оба раза выпало число очков, большее трех},

D = {оба раза выпало одинаковое число очков}.

2. Монета подбрасывается три раза. Наблюдаемый результат - появление герба (г) или цифры (ц) на верхней стороне - монеты. События:

A = ={герб выпал ровно один раз},

B = {ни разу не выпала цифра},

C = {выпало больше гербов, чем цифр},

D = {герб выпал не менее, чем два раза подряд}.

3. Монета подбрасывается до первого появления герба. Наблюдаемый результат - общее число подбрасываний. События:

A = {герб выпал при третьем подбрасывании},

B = {герб выпал не ранее, чем при третьем подбрасывании).

4. Производится стрельба по плоской прямоугольной мишени: $-2 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 1$. Наблюдаемый результат - координаты точки попадания в декартовой системе координат. По условиям стрельбы непопадание в указанный прямоугольник исключено. События:

A = {абсцисса точки попадания не меньше ординаты},

B = {произведение координат точки неотрицательно},

C = {сумма абсолютных величин координат точки превышает единицу}.

Выявить пары совместных событий.

5. На отрезке $[a,b]$ наудачу ставится точка. Пусть x координата этой точки. Затем на отрезке $[a, x]$ наудачу ставится еще одна точка с координатой y. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y). События:

A = {вторая точка ближе к правому концу отрезка $[a,b]$, чем к левому},

B = {расстояние между двумя точками меньше половины длины отрезка),

C = {первая точка ближе к левому концу отрезка $[a,b]$, чем к правому},

D = {первая точка ближе ко второй, чем к правому концу отрезка $[a,b]$}.

Выявить пары несовместных событий.

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x - время прихода Петра, y - время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). События:

А = {Петр пришел после 11 ч 45 мин},

В = {Петр пришел после Ивана),

С = {Иван пришел до 11ч 45 мин),

D = {встреча не состоялась),

Е = {Петр ждал Ивана все обусловленное время и не дождался),

F = {Ивану не пришлось ждать Петра},

K ={встреча состоялась когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

1.3. Операции над событиями

В этом пункте мы ознакомимся с тремя основными видами комбинации событий: суммой событий, произведением событие, противоположным событием.

В п. 2 было отмечено, что любое подмножество множества элементарных исходов Ω интерпретируется как событие (возможно, и ненаблюдаемое). Для любых двух подмножеств A, B пространства Ω определены подмножества $A \cup B$ (объединение A и B) и $A \cap B$ (пересечение A и B): $A \cup B$ состоит из тех элементов, которые принадлежат подмножеству A или подмножеству B, или обоим подмножествам вместе; $A \cap B$ состоит из тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Рассматривают также дополнение подмножества A в Ω, обозначаемое $\overline{A}$: дополнение $\overline{A}$ состоит из тех точек, которые не принадлежат множеству A.

Операциям $\cup$ и $\cap$ соответствуют операции над событиями - сумма и произведение событий.

Определение 4. *Суммой событий* A *и* B называется событие, обозначаемое $A+B$ и состоящее в том, что в результате опыта наступит или событие A, или событие B, или оба вместе.

Определение 5. *Произведением двух событий* A *и* B называется событие, обозначаемое AB и состоящее в том, что в результате опыта наступит и событие A, и событие B.

Операции дополнения множества A соответствует операция перехода от заданного события к противоположному.

Определение 6. Событием, *противоположным* событию A, называется событие, обозначаемое $\overline{A}$ и состоящее в том, что в результате опыта событие A не наступит.

Комментарии к определениям 4-6.

1) Определения 4-6 описывают подмножества элементарных событий, благоприятствующих сумме событий A и B, произведению событий A и B, событию, противоположному к A.

2) Операции суммы событий, произведения событий и дополнения обладают такими свойствами, как

а) $A+B=B+A,\ AB=BA,$ (*коммутативность*);

б) $(A+B)+C=A+(B+C),\ (AB)C=A(BC)$ (*ассоциативность*);

в) $A(B+C)=AB+AC$ (*дистрибутивность умножения относительно сложения*).

Проиллюстрируем свойство в) диаграммами Венна. Пусть события означают:

А = {попадание в квадрат},

В = {попадание в круг},

С = {попадание в треугольник}.

Соответствующие области изображены на рис. 1. Горизонтальной штриховкой отмечена область, соответствующая событию АС, вертикальной - событию ВС, косая штриховка соответствует событию АС+ ВС.

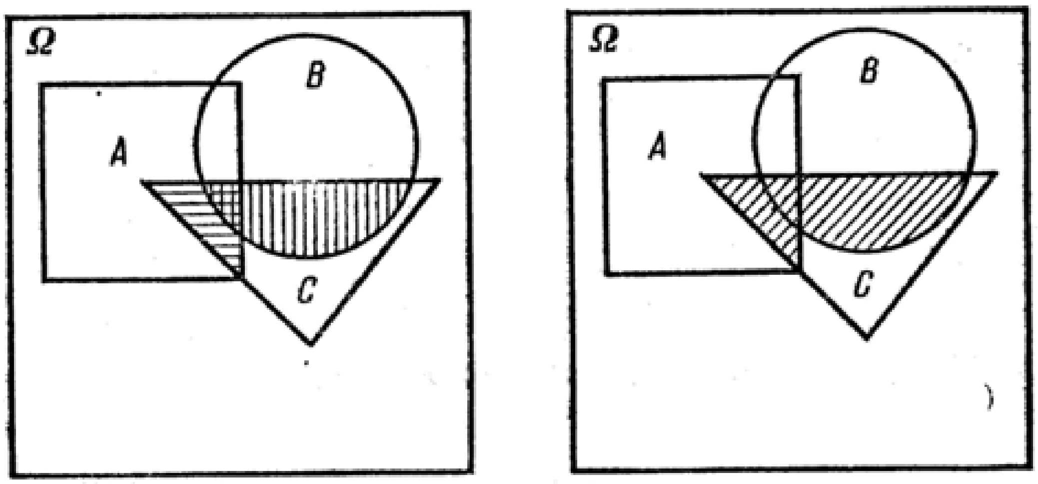


Рис. 1

Определение 7. Говорят, что множество событий вместе с операциями суммы, произведения событий и перехода к противоположному событию составляют ***алгебру событий.***

3) Рассматривают сумму трех и более событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ (быть может, бесконечного числа), которую обозначают

$$A_1+A_2+...+A_n+...=\sum_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Событие $\sum A_i$ состоит в том, что в результате опыта наступит хотя бы одно из событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Аналогично, произведение трех и более событий (быть может, бесконечного числа) $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ обозначается

$$A_1 \cdot A_2 \cdots A_n \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} A_i .$$

Событие $\prod A_i$ состоит в том, что в результате опыта наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$.

Примеры

1. Пусть при бросании игральной кости событие A означает, что выпадет четное число очков, а событие B - что количество очков не превзойдет четырех. Ясно, что

$$A = \{2,4,6\};\ B = \{1,2,3,4\};\ (A+B) = \{1,2,3,4,6\};\ (AB) = \{2,4\}.$$

Иными словами, событие $A+B$ наступает при выпадении чисел 1, 2, 3, 4, 6, а событие AB - при выпадении чисел 2, 4.

Для событий $\overline{A},\ \overline{B},\ \overline{A+B},\ \overline{AB}$, противоположным соответственно к событиям $A,\ B,\ A+B,\ AB$, получим

$$\overline{A} = \{1,3,5\}; \overline{B} = \{5,6\}; \left(\overline{A+B}\right) = \{5\};\ \left(\overline{AB}\right) = \{1,3,5,6\}.$$

2. Пусть при игре в спортлото события $A,\ B, C$ заключаются в том, что выбранная в результате опыта шестерка чисел содержит соответственно число 7, 12, 20. Результатом испытания оказалась шестерка чисел 7, 8, 9, 20, 21, 42. Какие из следующих событий наступили при этом:

$$A,\ B,\ C,\quad \overline{A},\ \overline{B},\ \overline{C},\quad ABC,\ A+B,\ A+C,\quad \overline{A+C}\ ?$$

Решение

Обозначим множество {7, 8, 9, 20, 21, 42} через M . Тогда получим, что из перечисленных в условии событий наступили следующие: A, поскольку $7 \in M$; C , так как $20 \in M$; $\overline{B}$, поскольку $12 \notin M$; $A+B$, так как $7 \in M$; $A+C$, поскольку $7 \in M$ и $20 \in M$. Остальные из перечисленных событий не наступили.

В алгебре событий справедливы формулы

$$\overline{A_1 + A_2 + ... + A_n} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}, \qquad (*)$$

$$\overline{A_1 \cdot A_2 \cdots A_n} = \overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}. \qquad (**)$$

Строгий вывод этих формул мы опускаем. Здесь мы ограничимся лишь некоторым пояснением к ним. Левая часть формулы (*) есть событие, противоположное к $A_1 + A_2 + ... + A_n$. Последнее событие наступает тогда и только тогда, когда наступает хотя бы одно из A_i $(i = 1,2,...,n)$. Событием, противоположным тому, что наступит хотя бы одно из A_i, является событие, состоящее в том, что не наступит ни одно из A_i т.е. наступит каждое из $\overline{A_i}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdots \overline{A_n}$.

Левая часть формулы (**) есть событие, противоположное событию $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$. Последнее событие состоит в том, что наступит каждое из событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Событием, противоположным тому, что наступит каждое из $A_i \quad (i = 1, 2, ..., n)$, является событие, состоящее в том, что не наступит хотя бы одно из $A_1 \cdot A_2 \cdots A_n$, т. е. что наступит хотя бы одно из $\overline{A_1}, \overline{A_2}, ..., \overline{A_n}$; это означает, что наступит событие $\overline{A_1} + \overline{A_2} + ... + \overline{A_n}$.

Пример 3. Каждый из стрелков делает по одному выстрелу в мишень.

а) Какое событие является противоположным к событию A: «хотя бы один стрелок попал в цель»?

б) Какое событие противоположно событию «каждый из стрелков попал в цель?»

Решение

а) Таким событием является «каждый из стрелков промахнулся» или, что то же самое, «ни один не попал в цель». Справедливость ответа вытекает из того, что событие A означает поражение мишени, а событие $\overline{A}$ - непоражение мишени. Этот пример иллюстрирует формулу (*).

б) Таким событием является «хотя бы один из стрелков промахнулся». Этот пример иллюстрирует формулу (**).

Пример 4. Игральная кость подбрасывается один раз. Наблюдаемый результат - число очков на верхней грани. События A, B, C, D, E, F описаны в примере 1, из п. 2 данного параграфа. Описать состав и выяснить смысл следующих событий: $E_1 = \overline{B}$, $E_2 = \overline{C}$, $E_3 = AB,$ $E_4 = A + B$, $E_5 = A - B,$ $E_6 = E + D,\ E_7 = EF.$

Решение

В обозначениях примера 1 напишем состав указанных событий, используя определение соответствующей алгебраической операции:

$E_1 = \left\{\omega_{2,} \omega_4, \omega_4\right\} = \left\{\text{выпало четное число очков}\right\};$

$E_2 = \left\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\right\} = \left\{\text{выпало число очков, небольше трех}\right\};$

$E_3 = \left\{\omega_3\right\} = \left\{\text{выпшее число очков,нечетно и кратно трем}\right\};$

$E_4 = \left\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_6\right\} = \left\{\text{выпавшее число очков или нечетно, или}\right.$

$\left.\text{тремкратно трем}\right\};$

$E_5 = A\overline{\overline{B}} = AB - E_3; \qquad E_6 = \varnothing + D = D = \Omega.$

Пример 5. Рассмотрим снова случайный эксперимент, описанный в примере 2. Как уже говорилось, множество идеализированных элементарных исходов

$$\Omega = \left\{(x, y):\ x^2 + y^2 \le 100\right\}$$

является удобной формой математического описания наблюдаемых событий, связанных с положением на экране индикатора светящегося пятна - отраженного импульса от цели. Пусть наблюдения в данном опыте состоят в регистрации факта принадлежности светящегося пятна произвольно выбранному участку круга, имеющему площадь. Например, проверяется результат: попадает ли отраженный импульс от цели в некоторую часть кольца, ограниченную радиусами r_1 и r_2 и полярными углами φ_1 и φ_2. Составляет ли множество всех квадрируемых подмножеств множества Ω алгебру событий?

Решение

Из интегрального исчисления известно, что объединение, пересечение и дополнение конечного или счетного числа квадрируемых, подмножеств некоторого квадрируемого множества на плоскости являются квадрируемыми множествами. Отсюда следует, что система квадрируемых подмножеств множества Ω образует алгебру для данного опыта.

Упражнения

В задачах 1-2 требуется по описанию опыта построить множество элементарных исходов и выявить состав подмножеств, соответствующих указанным событиям.

1. Пусть А, В, С - три события, наблюдаемые в данном эксперименте. Выразить в алгебре событий следующие события:

E_1 = {из трех событий А, В, С произойдет ровно одно},

E_2 = {из трех событий А, В, С произойдет хотя бы одно},

E_3 = {из трех событий А, В, С произойдет ровно два},

E_4 = {из трех событий А, В, С произойдет не меньше двух},

E_5 = {из трех событий А, В, С не произойдет ни одного},

E_6 = {из трех событий А, В, С произойдет хотя бы два},

E_7 = {из трех событий А, В, С не произойдет хотя бы одно}.

2. Произведено три выстрела из орудия по цели. Событие A_k = {попадание при k-м выстреле} (k = 1,2, 3).

а) Выяснить состав множества Ω, выразив каждый элементарный исход ω_i, через события A_k,

б) Записать в алгебре событий следующие события:

А = {ровно одно попадание},

В = {хотя бы одно попадание},

С = {хотя бы один промах},

D = {не меньше двух попаданий},

Е = {попадание не раньше, чем при третьем выстреле}.

1.4. Классическое определение вероятности

Опыт, связанный с пространством элементарных событий Ω, позволяет каждому событию A, сопоставить число $p(A)$, где $0 \le p(A) \le 1$), измеряющее «степень вероятности» наступления события *A,* причем для соответствия $A \to p(A)$ выполняются все требования здравого смысла, перечисленные выше.

Рассмотрим опыт, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ представляет собой конечное множество.

Соответствие $A\to p(A)$ строится следующим образом. Пусть дано событие $A=\left\{\omega_{k_1},\omega_{k_2},...,\omega_{k_m}\right\}\subset\Omega$; это значит, что заданы все элементарные исходы (события), благоприятствующие событию *A*. Общее количество таких элементарных исходов обозначим через m, а число всех исходов опыта - число элементов множества Ω через n.

Положим

$$p(A)=\frac{m}{n}\ . \tag{1}$$

Формула (1) сопоставляет каждому событию *A* в рассматриваемом испытании число $p(A)$, называемое *вероятностью* события *A*.

Определение 8. Вероятностью $p(A)$ события A называют отношение числа исходов благоприятствующих этому событию к общему числу всех элементарных исходов испытания: $p(A)=\dfrac{m}{n}$.

Легко убедиться в том, что более вероятным событиям формула (1) сопоставляет большие вероятности, равновероятным событиям - равные вероятности, невозможному событию - нуль, достоверному событию- единицу. В частности, вероятность каждого элементарного исхода (события) ω_i равна $\dfrac{1}{n}$ $(i=1,2,...,n)$.

Формула (1) задает так называемое «классическое определение» вероятности события.

Определение 9. Всякий опыт, удовлетворяющий тому условию, что соответствующее ему множество элементарных исходов $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ представляет собой конечное множество равновероятных исходов, называется **классической схемой или схемой урн.**

Классическая схема является математической формализацией опытов, в которых элементарные исходы обладают определенной симметрией по отношению к условиям опыта, так что нет оснований считать какой-либо из исходов более вероятным, чем другой. Таким свойством, например, обладают опыты по извлечению наудачу определенного числа шаров из урны, содержащей заданное количество неразличимых на ощупь шаров. Отсюда и название - схема урн.

Этим способом пользовались французские математики XVII в. Блез Паскаль и Пьер Ферма, рассматривавшие формулу (1) как определение вероятности. В далекое от нашей эпохи время трудно было предвидеть роль понятия вероятности, разнообразие и серьезность будущих приложений теории вероятностей к естествознанию, технике и экономике. Первоначальным материалом, на котором «отрабатывались» простейшие факты теории, были азартные игры. С тех пор задачи о бросании игральной кости, об извлечении карт из колоды, шаров из урны и т. п. стали традиционными для теории вероятностей. Заметим, что и по сей день, эти задачи сохраняют свою роль как тренировочные упражнения, а в некоторых случаях – как наглядные модели для более серьезных вероятностных схем.

Оказывается, что рассмотренный выше опыт, связанный с пространством элементарных исходов (событий), носит довольно общий характер: многие задачи теории вероятностей (в том числе далеко не простые) представляют собой частный случай этой общей схемы.

Отметим, однако, что пространство элементарных исходов может быть бесконечным, этот случай рассмотрен в п. 6.

1.5. Элементы комбинаторики

Для подсчета m- общего количество благоприятствующих элементарных исходов некоторого наблюдаемого события и n- числа всех исходов опыта, связанного с этим событием (число элементов множества Ω) необходимо подсчитать число возможных способов совершения каких-либо действий. Задачи такого типа называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением таких задач, - комбинаторикой. Сформулируем два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

Правило произведения. Пусть требуется выполнишь одно за другим какие-либо r действий. Если первое действие можно выполнишь l_1 способами, второе действие - l_2 способами и так до r - го действия, которое можно выполнишь l_r способами, то все r действий могут быть выполнены $l_1 l_2 \cdots l_r$ способами.

Правило суммы. Пусть требуется выполнишь одно из каких-либо r действий, взаимно исключающих друг друга. Если первое действие можно выполнишь l_1 способами, второе действие - l_2 способами и так до r - го действия, которое можно выполнить l_r способами, то выполнить одно из этих r действий можно $l_1 + l_2 + \cdots + l_r$ способами.

Напомним понятие факториала, активно используемое в комбинаторике. **Факториалом натурального числа** l называется число

$$l! = l(l-1)(l-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \qquad (2)$$

По определению, факториалом нуля является единица: $0! = 1$.

Рассмотрим некоторое множество S, состоящее из l различных элементов. Пусть $1 \le k \le l$. Назовём множество, состоящее из k элементов, упорядоченным, если каждому элементу этого множества поставлено в соответствие число от 1 до k, причём различным элементам множества соответствуют разные числа.

Размещениями из l **элементов по** k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга составом элементов или порядком их расположения.

Число размещений из l элементов по k равно

$$A_l^k = \frac{l!}{(l-k)!} = l(l-1)(l-2)\cdots(l-k+1). \tag{3}$$

Перестановками из l **элементов** называются размещения из l элементов по l, т. е. упорядоченные подмножества множества S, состоящие из всех элементов данного множества и отличающиеся друг от друга только порядком их расположения.

Число перестановок из l элементов равно

$$P_l = l! = l(l-1)(l-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1. \tag{4}$$

Сочетаниями из l **элементов по** k называются подмножества множества S, состоящие из k различных элементов и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний из l элементов по k равно

$$C_l^k = \frac{A_l^k}{P_l} = \frac{l!}{k!(l-k)!}. \tag{5}$$

Размещениями с повторениями из l **элементов по** k называются упорядоченные подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга составом элементов пли порядком их расположения.

Число размещений с повторениями из l элементов по k равно

$$\tilde{A}_l^k = l^k. \tag{6}$$

Сочетаниями с повторениями из l **элементов по** k называются подмножества множества S, состоящие из k элементов, среди которых могут оказаться одинаковые, и отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Число сочетаний с повторениями из l элементов по k равно

$$\tilde{C}_l^k = C_{l+k-1}^k \frac{A_l^k}{P_l} = \frac{(l+k-1)!}{k!(l-1)!}. \tag{7}$$

Отметим, что формулы (4) - (7) сохраняют смысл и остаются справедливыми и при $k=0$.

Если во множестве S, состоящие из l элементов, есть только r различных элементов, то **перестановками с повторениями из** l **элементов** называются упорядоченные подмножества множества S, в которые первый элемент множества S входит l_1 раз, второй элемент - l_2 раз и так до r-го элемента, который входит l_r раз $(l_1 + l_2 + \cdots + l_r = l)$.

Число перестановок с повторениями из l элементов, в которые первый элемент множества S входит l_1 раз, второй элемент - l_2 раз и так до r-го элемента, который входит l_r раз $(l_1 + l_2 + \cdots + l_r = l)$, равно

$$\tilde{P}_l(l_1, l_2, ..., l_r) = \frac{l!}{l_1! l_2! \cdots l_r!}. \tag{8}$$

Примеры

1. Маша поссорилась с Петей и не хочет ехать с ним в одном автобусе. От общежития до института с 7 до 8 ч отправляется пять автобусов. Не успевший на последний из этих автобусов опаздывает на лекцию. Сколькими способами Маша и Петя могут доехать до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию?

Решение

Петя может доехать до института $l_1 = 5$ различными способами (на одном из пяти автобусов), при этом Маше остаётся только $l_2 = 4$ способа (так как один из автобусов занят Петей). Таким образом, по правилу произведения у Пети и Маши есть $l_1 l_2 = 5 \cdot 4 = 20$ различных способов добраться до института в разных автобусах и не опоздать на лекцию.

2. В информационно-технологическом управлении банка работают три аналитика, десять программистов и 20 инженеров. Для сверхурочной работы в праздничный день начальник управления должен выделить одного сотрудника. Сколько способов существует у начальника управления?

Решение

Начальник управления может отобрать одного аналитика $l_1 = 3$ способами, одного программиста - $l_2 = 10$ способами, а одного инженера - $l_3 = 20$ способами. Поскольку по условию задачи начальник управления может выделить .любого из своих сотрудников, согласно правилу суммы у него существует $l_1 + l_2 + l_3 = 3 + 10 + 20 = 33$ различных способа выбрать сотрудника для сверхурочной работы.

3. Начальник службы безопасности банка должен ежедневно расставлять десять охранников по десяти постам. В целях усиления безопасности одна и та же комбинация расстановки охранников по постам не может повторяться чаще одного раза в месяц. Чтобы оценить, возможно ли это, найти число различных комбинаций расстановки охранников.

Решение

Первый способ. На первый пост начальник службы безопасности может назначить любого из $l_1 = 10$ охранников, на второй пост - любого из оставшихся $l_2 = 9$ охранников и так до девятого поста, на который можно назначить любого из оставшихся $l_9 = 2$ охранников, при этом оставшийся $l_{10} = 1$ охранник будет назначен на десятый пост. Поэтому, согласно правилу произведения, у начальника службы безопасности есть

$$l_1 l_2 \cdots l_{10} = 10 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = 10! = 3628800$$

способов расстановки охранников по постам. Поскольку количество дней в месяце не превышает 31, у начальника службы безопасности заведомо существует достаточное число способов расстановки своих подчинённых по постам.

Второй способ. Число способов расстановки десяти охранников по десяти постам, существующих у начальника службы безопасности, описывается числом перестановок из 10 элементов, т. е. $P_{10} = 10! = 3628800$.

Упражнение

Определить, сколькими способами можно разместить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга.

Пример 4. Новый президент банка должен назначить двух новых вице-президентов из числа десяти директоров. Сколько способов существует у президента, если: а) один из вице-президентов (первый) выше другого по должности; б) вице-президенты по должности равны между собой.

Решение

Первый способ. а) Первого вице-президента можно выбрать из $l_1 = 10$ претендентов, при этом на пост второго вице-президента будут претендовать $l_2 = 9$ оставшихся директоров. Поэтому, согласно правилу произведения, у нового президента банка есть $l_1 l_2 = 10 \cdot 9 = 90$ способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров. б) Пусть первое действие заключается в том, что президент отбирает двух человек на должности вице-президентов, а второе действие - в том, что президент говорит отобранным людям, кто из них является первым вице-президентом, а кто - вторым. Пусть первое действие можно выполнить l_1 способами, второе действие, очевидно, можно выполнить $l_2 = 2$ способами, и по правилу произведения число способов назначения двух вице-президентов, один из которых подчиняется другому, из числа десяти директоров составляет $l_1 l_2 = 2l_1$. С другой стороны, в пункте а) мы нашли это число, и оно оказалось равным 90, поэтому $l_1 = \frac{90}{2} = 45$.

Второй способ. а) Число способов выбора двух кандидатов на две различные должности из десяти претендентов описывается числом размещений из 10 элементов по 2, т. е. $A_{10}^2 = 90$. б) Число способов выбора двух кандидатов на две одинаковые должности из десяти претендентов описывается числом сочетаний из 10 элементов по 2, т. е. $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$.

Упражнения

1. В кредитном отделе банка работают восемь человек. Сколько существует способов распределить между ними три премии: а) одинакового размера; б) разных размеров, известных заранее?

2. Одна из воюющих сторон захватила в плен 12 солдат, а другая 15. Определить, сколькими способами стороны могут обменять семерых военнопленных.

3. Петя и Маша коллекционируют видеокассеты. У Пети есть 30 комедий, 80 боевиков и 7 мелодрам, у Маши - 20 комедий, 5 боевиков и 90 мелодрам. Сколькими способами Петя и Маша могут обменяться тремя комедиями, двумя боевиками и одной мелодрамой?

4. В период сдачи итоговых контрольных работ в течение 20 дней студенты одной группы должны сдать итоговых контрольных работ по пяти

дисциплинам. Сколькими способами можно составить расписание сдачи итоговых контрольных работ , если: а) запрещается сдавать два сдачи итоговых контрольных работ в один день; б) между двумя сдачи итоговыми контрольными работами должен пройти хотя бы один день для подготовки?

5. Б банке девять учредителей. Регистрационные документы хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, и сколько ключей к ним нужно изготовить, чтобы доступ к содержимому сейфа был возможен только тогда, когда соберётся не менее шести учредителей?

6. Маша решила помириться с Петей и позвонить ему, но забыла две последних цифры его телефона и набирает их наудачу. Найти наибольшее возможное число неудачных попыток, которые сделает Маша, прежде чем дозвонится до Пети.

Пример 5. Маша очень любит пирожные и ежедневно в булочной рядом с институтом покупает шесть пирожных (одинаковых или разных). Всего в булочной продаётся 11 сортов пирожных. Сколькими способами Маша может выбрать из них шесть штук?

Решение

Каждому набору пирожных, которые выберет Маша, будем ставить в соответствие последовательность нулей и единиц, определяемую по следующему правилу. Напишем подряд столько единиц, сколько пирожных первого вида выбрала Маша, далее поставим нуль и после него запишем количество отобранных пирожных второго вида и т. д. Например, комбинации «одно пирожное второго вида, три пирожных пятого вида и одно пирожное восьмого вида» соответствует такая последовательность:

«010001110001000»

(нули отделяют виды пирожных друг от друга, поэтому нуль после одиннадцатого вида не нужен). При этом каждому набору пирожных взаимно однозначным образом соответствует последовательность, построенная по описанному правилу. Все такие последовательности состоят, очевидно, из 16 знаков, причём 10 из них нули, которые могут занимать любое место. Поэтому количество способов выбора пирожных равно количеству всех таких последовательностей, т.е. числу размещений десяти нулей по 16 местам: $C_{16}^{10} = 8008$.

Упражнение

В конкурсе по трём номинациям участвуют десять кинофильмов. Вычислить число вариантов распределения призов, если по каждой номинации установлены: а) различные призы; б) одинаковые призы.

Пример 6. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «мама»? Выписать все эти слова.

Решение

Число различных слов, которые можно составить, переставляя буквы в слове «мама», описывается числом перестановок с повторениями из $l = 4$

элементов (букв в слове «*мама*»), в которые первый элемент (буква «*м*») входит $l_1 = 2$ раза, а второй элемент (буква «*а*») - $l_2 = 2$ раза

$$\left(l_1 + l_2 = 4 = l\right).$$

Это число равно $\tilde{P}_4\left(2,2\right) = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Шесть различных слов, получающиеся перестановками букв в слове «мама», таковы: «*ммаа*», «*мама*», «*маам*», «*амма*», «*амам*», «*аамм*».

Упражнение

Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове «*математика*»?

1.6. Примеры вычисления вероятности по формуле (1)

1. В испытании, связанном с бросанием игральной кости, пространство элементарных исходов состоит из шести элементов: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Вероятность того, что в результате опыта выпадет количество очков, большее двух, равна 4/6 четыре благоприятствующих элементарных исходов: 3, 4, 5, 6 $\left(m = 4\right)$ и общее количество элементарных исходов $n = 6$.

2. При игре в спортлото элементарным исходом является выбор шести различных чисел (шести нумерованных шаров) из множества 1, 2, 3,...,43, 44, 45. Так как шары, на которых обозначены цифры, одинаковы по физическим параметрам, то естественно считать, что все шестерки шаров равновероятны (и, значит, требование, предъявляемое к пространству элементарных исходов, выполнено). Пространством элементарных исходов является множество неупорядоченных наборов из 6 чисел $\left\{1, 2, ..., 45\right\}$, состоящее из

$$C_{45}^{6} = \frac{45!}{\left(45-6\right)!6!} = 8145060$$

элементов (общее количество различных шестерок равно 8145060).

Вероятности событий *А,* связанных с рассматриваемым испытанием, можно вычислить по формуле $p\left(A\right) = \frac{m}{n}$, где m - количество элементарных исходов, благоприятствующих событию *А,* т. е. количеству шестерок, означающих наступление события A. Тогда вероятность того, что в результате опыта появится заранее заданная шестерка чисел (т. е. вероятность угадать все шесть чисел), равна

$$p\left(A\right) = \frac{m}{n} = \frac{1}{8145060} = 0{,}000000123.$$

3. Брошено две игральные кости. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятность события $A = \{$сумма выпавших очков делится на $6\}$.

Решение

Исход эксперимента (опыта) можно описать парой чисел $\omega_{ij} = (i, j)$, где i -число очков, выпавших на первой кости, а j - на второй $(i, j = 1,2,...,6)$). Поэтому множество элементарных исходов

$$\Omega = \left\{\omega_{ij} = (i, j) : i = 1,2,...,6; \quad j = 1,2,...,6\right\}.$$

Нетрудно проверить, что число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) - $n = 36$. Другими словами общее число элементарных событий $n = 36$. Событие A соответствует подмножеству

$$\{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega. .$$

Другими словами

$$A = \{(1,5), \quad (5,1), \quad (2,4), \quad (4,2), \quad (3,3), \quad (6,6)\} \subset \Omega. .$$

Так как число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) - $m = 6$, то по формуле классической вероятности получаем

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

В этом примере помимо нахождения n - число элементов множества Ω (число всех исходов эксперимента) и m - число элементов множества A (число всех благоприятствующих событию A исходов) нам удалось, полностью описать то из чего состоит множества Ω и A. Однако во многих случаях описания содержания этих множеств является практически невозможным. Следует отметить, что это и не является обязательным. Обязательным является нахождения чисел m и n. Нахождения этих чисел, следовательно, вычисления вероятностей в классической схеме часто облегчится, если применит элементы комбинаторики см. п.п. 4.1.

Еще заметим, что подсчет числа элементов тех или иных подмножеств множества Ω часто облегчается благодаря следующей формуле. Число элементов прямого произведения множеств равно произведению числа элементов составляющих множеств, т. е.

$$N(\Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_s) = N(\Omega_1)N(\Omega_2)\cdots N(\Omega_s).$$

При решении вероятностных задач важно выделять опыты, где можно использовать те или иные комбинаторные формулы. Каждая из комбинаторных формул определяет общее число элементарных исходов в некотором опыте, состоящем в выборе наудачу k элементов из l различных элементов исходного множества $E = \{e_1, e_2, ..., e_l\}$. При этом в постановке каждого такого опыта строго оговорено, каким способом производится выбор и что понимается под различными выборками.

Существуют **две принципиально различные схемы** выбора. **В первой схеме** выбор осуществляется без возвращения элементов (это значит, что отбираются либо сразу все k элементов, либо последовательно по одному элементу, причем каждый отобранный элемент исключается из исходного множества). **Во второй схеме** выбор осуществляется поэлементно с обязательным возвращением отобранного элемента на каждом шаге и тщательным перемешиванием исходного множества перед следующим выбором. После того как выбор тем или иным способом осуществлен, отобранные элементы (или их номера) могут быть либо упорядочены (т. е. выложены в последовательную цепочку), либо нет. В результате получаются следующие **четыре различные постановки опыта** по выбору наудачу k элементов из общего числа l различных элементов множества E.

Первая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям

Пример 4. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают три изделия для контроля. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{$в полученной выборке ровно одно изделие бракованное$\}$,

$B = \{$в полученной выборке нет ни одного бракованного изделия$\}$.

Решение

Занумеруем изделия числами от 1 до 10, и пусть множество номеров $E_1 = \{1,2,...,7\}$ соответствует годным изделиям, а множество номеров $E_2 = \{8,9,10\}$ - бракованным изделиям.

Согласно описанию эксперимента производится выбор без возвращения и без упорядочивания трех элементов из множества $E = E_1 \cup E_2 = \{1,2,...,10\}$. Поэтому $n = C_{10}^3 = 120$.

Событию A благоприятствуют только такие исходы, когда один элемент выборки принадлежит E_2, а остальные два элемента - множеству E_1. По формуле прямого произведения множеств получаем, что число всех таких исходов $m = C_3^2 \cdot C_7^2 = 63$, поэтому

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{63}{120} = \frac{21}{40}.$$

Событию B благоприятствуют только такие исходы, когда все три отобранных элемента принадлежат множеству E_1, поэтому $m = C_7^2 = 35$. Отсюда следует, что

$$p(B) = \frac{m}{n} = \frac{35}{120} = \frac{7}{24}.$$

Упражнения

1. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящих из трех букв. Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву *а*?

2. Из полного набора домино (28 штук) наудачу выбирают 7 костей. Какова вероятность, что среди них окажется по крайней мере одна кость с шестью очками?

3. Из десяти первых букв русского алфавита наудачу составляется новый алфавит, состоящий из пяти букв. Найти вероятности следующих событий:

A ={в состав нового алфавита входит буква *о*},

B = {в состав нового алфавита входят только согласные буквы}.

4. Среди кандидатов в студенческий совет факультета 3 первокурсника, 5 второкурсников и 7 третьекурсников. Из этого состава наудачу выбирают пять человек на предстоящую конференцию. Найти вероятности следующих событий:

A = {будут выбраны одни третьекурсники},

B = {все первокурсники попадут на конференцию},

C = {не будет выбрано ни одного второкурсника}.

5. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 1 карты. Найти вероятности следующих событий:

A = {в полученной выборке все карты бубновой масти},

B = {окажется хотя бы один туз}.

б) Схема выбора, приводящая к размещениям

Пример 5. Множество E состоит из 10 первых букв русского алфавита. Опыт состоит в выборе без возвращения 4 букв и записи слова в порядке поступления букв. Сколько 4-буквенных слов может быть получено в данном опыте? Какова вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой a?

Решение

n число всех 4-буквенных слов в данном опыте - равно числу 4- элементных упорядоченных подмножеств из 10 элементов, т. е.

$$n = A_{10}^4 = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040.$$

Пусть событие $A =${наудачу составленное слово из 4 букв множества E оканчивается буквой a}. Число элементов множества A равно числу способов разместить на три оставшиеся места по одному символу из 9 (символ a исключен из рассмотрения, поскольку его место уже определено); таким образом,

$$m = A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

и

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{504}{5040} = \frac{1}{10}.$$

Упражнения

1. Числа 1, 2, ..., 9 записываются в случайном порядке. Найти вероятности следующих событий:

$A =${числа будут записаны в порядке возрастания},

$B =${числа 1 и 2 будут стоять рядом и в порядке возрастания},

$C =${числа 3, 6 и 9 будут следовать друг за другом и в порядке возрастания},

$D =${на четных местах будут стоять четные числа},

$E=\{$сумма каждых двух чисел, стоящих на одинаковом расстоянии от концов, равна $10\}$.

2. Группа, состоящая из 8 человек, занимает места с одной стороны прямоугольного стола. Найти вероятность того, что два определенных лица окажутся рядом, если а) число мест равно 8; б) число мест равно 12.

3. На пяти карточках написаны цифры от 1 до 5. Опыт состоит в случайном выборе трех карточек и раскладывании их в порядке поступления в ряд слева направо. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{$появится число $123\}$,

$B=\{$появится число, не содержащее цифры $3\}$,

$C=\{$появится число, состоящее из последовательных цифр$\}$,

$D=\{$появится четное число$\}$,

$E=\{$появится число, содержащее хотя бы одну из цифр 2 или $3\}$.

4. 10 вариантов контрольной работы, написанные каждый на отдельной карточке, перемешиваются и распределяются случайным образом среди восьми студентов, сидящих в одном ряду, причем каждый получает по одному варианту. Найти вероятности следующих событий:

$A=\{$варианты с номерами 1 и 2 останутся неиспользованными$\}$,

$B=\{$варианты 1 и 2 достанутся рядом сидящим студентам$\}$,

$C=\{$будут распределены последовательные номера вариантов$\}$.

5. 12 студентов, среди которых Иванов и Петров, случайным образом занимают очередь за учебниками в библиотеку. Какова вероятность, что между Ивановым и Петровым в образовавшейся очереди окажутся ровно 5 человек?

Вторая схема

а) Схема выбора, приводящая к сочетаниям с повторениями

Пример 6. В технической библиотеке имеются книги по математике, экономике, статистике и т. д., всего по 16 разделам науки. Поступили очередные четыре заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий:

$A=\{$заказаны книги из различных разделов науки$\}$,

$B=\{$заказаны книги из одного и того же раздела науки$\}$.

Решение

Число всех равновероятных исходов данного эксперимента равно, очевидно, числу сочетаний с повторениями из 16 элементов по 4, т. е.

$$n=C_{16+4-1}^{4}=C_{19}^{4}.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, равно числу способов отобрать без возвращения четыре элемента из 16, т.е. $m=C_{16}^{4}$, поэтому

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{4}}{C_{19}^{4}}=\frac{455}{969}\approx 0,47.$$

Число исходов, благоприятствующих событию B, равно числу способов выбрать один элемент из шестнадцати, поэтому

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_{16}^{1}}{C_{19}^{4}}=\frac{4}{969}\approx 0{,}004\,.$$

Упражнения

1. В кондитерской имеется 7 видов пирожных. Очередной покупатель выбил чек на 4 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что покупатель заказал:
а) пирожные одного вида; б) пирожные разных видов; в) по два пирожных различных видов.

2. Из общего количества костей домино, содержащих числа $0,1,2,...,n$, наудачу извлекли одну кость. Оказалось, что это не дубль. Какова вероятность p_n того, что вторую извлеченную также наудачу кость домино можно будет приставить к первой. Найти числовые значения вероятности для $n=6$ (обычный набор домино) и $n=9$ (расширенный набор).

б) Схема выбора, приводящая к размещениям с повторениями

Пример 7. 7 одинаковых шариков случайным образом рассыпаются по 4 лункам (в одну лунку может поместиться любое число шариков). Сколько существует различных способов распределения 7 шариков по 4 лункам? Какова вероятность того, что в результате данного опыта первая лунка окажется пустой (при этом может оказаться пустой и еще какая-либо лунка)?

Решение

Занумеруем лунки и шарики. Можно считать, что опыт состоит в 7-кратном выборе с возвращением номера лунки и записи 7- буквенного слова. При этом каждому порядковому номеру буквы (номеру шарика) будет поставлена в соответствие одна из четырех букв алфавита (номер лунки).

Так, например, слово

1	1	3	1	4	4	2
1	2	3	4	5	6	7

означает, что в первую лунку попали шары № 1, № 2 и № 4, во вторую лунку - шар № 7, в третью - шар № 3, в четвертую - шары № 5 и № 6. Таким образом, число всех способов распределить 7 шариков по 4 лункам равно числу различных 7- буквенных слов из алфавита в 4 буквы, т. е. $n=4^7$.

Событие $A=\{$первая лунка окажется пустой$\}$ соответствует такому выбору, когда символ 1 (номер первой лунки) удален из алфавита. Поэтому $m=3^7$ и

$$p(A)=\frac{m}{n}=\frac{3^7}{4^7}=\left(\frac{3}{4}\right)^7\approx 0{,}133.$$

Упражнения

1. Бросается 10 одинаковых игральных костей. Вычислить вероятности следующих событий:

$A=$ {ни на одной кости не выпадет 6 очков},

B = {хотя бы на одной кости выпадет 6 очков},

C = {ровно на 3 костях выпадет 6 очков}.

2. Опыт состоит в четырехкратном выборе с возвращением одной из букв алфавита E = {*а, б, к, о, м*} и выкладывании слова в порядке поступления букв. Какова вероятность того, что в результате будет выложено слово «*мама*»?

3. В подъезде дома установлен замок с кодом. Дверь автоматически отпирается, если в определенной последовательности набрать три цифры из имеющихся десяти. Некто вошел в подъезд и, не зная кода, стал наудачу пробовать различные комбинации из трех цифр. На каждую попытку он тратит 20 секунд. Какова вероятность события A = {вошедшему удастся открыть дверь за один час}?

4. Телефонная книга раскрывается наудачу и выбирается случайный номер телефона. Считая, что телефонные номера состоят из 7 цифр, причем все комбинации цифр равновероятны, найти вероятности следующих событий:

A = {четыре последние цифры телефонного номера одинаковы},

B = {все цифры различны},

C = {номер начинается с цифры 5},

D = {номер содержит три цифры 5, две цифры 1 и две цифры 2}.

5. Шесть человек вошли в лифт на первом этаже семиэтажного дома. Считая, что любой пассажир может с равной вероятностью выйти на 2-м, 3-м, ..., 7- м этажах, найти вероятности следующих событий:

A = {на втором, третьем и четвертом этажах не выйдет ни один из пассажиров},

B = {трое пассажиров выйдут на седьмом этаже},

C = {на каждом этаже выйдет по одному пассажиру},

D = {все пассажиры выйдут на одном этаже}.

6. К четырехстороннему перекрестку с каждой стороны подъехало по одному автомобилю. Каждый автомобиль может с равной вероятностью совершить один из четырех маневров на перекрестке: развернуться и поехать
обратно, поехать прямо, налево или направо. Через некоторое время все автомобили покинули перекресток. Найти вероятности следующих событий:

A = {все автомобили поедут по одной и той же улице},

B = {по определенной улице поедут ровно три автомобиля},

C = { по крайней мере по одной из улиц не поедет ни один автомобиль}.

7. Из разрезной азбуки выкладывается слово математика. Затем все буквы этого слова тщательно перемешиваются и снова выкладываются в случайном порядке. Какова вероятность того, что снова получится слово «*математика*»?

8. 52 карты раздаются четырем игрокам (каждому по 13 карт). Найти вероятности следующих событий:

$A=$ {каждый игрок получит туза},

$B=$ {один из игроков получит все 13 карт одной масти},

$C=$ { все тузы попадут к одному из игроков},

$D=$ {двое определенных игроков не получат ни одного туза}.

1.7. Статистический подход к понятию вероятности

Существует еще один подход к понятию вероятности, не связанный с пространством элементарных событий. В основе этого подхода лежит явление устойчивости частоты наступления события при многократном повторении испытаний. Пусть в результате некоторого опыта возможно появление события A. Повторим опыт n раз и подсчитаем количество m наступлений событий A . Будем предполагать, что в данной серии опытов результаты предшествующих испытаний не влияют на последующие. Как известно из практики, отношение $\frac{m}{n}$ мало изменяется при больших п несмотря на то, что событие A случайное и величина m также зависит от случая. В частности, если монету подбрасывать многократно, то отношение количества выпавших гербов к общему числу бросаний монеты приближенно будет равно 1/2.

Отношение $\frac{m}{n}$ называется ***частотой*** появления события A в n испытаниях.

При условии устойчивости частоты появления события A число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к вероятности как к характеристике того, насколько вероятно изучаемое событие с точки зрения практики и здравого смысла. Действительно, число $\frac{m}{n}$ удовлетворяет неравенству $0 \le \frac{m}{n} \le 1$, более вероятным с точки зрения здравого смысла событиям соответствует большее значение $\frac{m}{n}$, для невозможных событий $\frac{m}{n}=0$, для достоверных $\frac{m}{n}=1$; если событие A является суммой двух несовместных событий B и C, т. е. $A=B+C$, то $\frac{m_A}{n}=\frac{m_B}{n}+\frac{m_C}{n}$, , где m_A, m_B, m_C - количество наступлений событий в n опытах. В силу сказанного (и при том условии, что возможно многократное повторение опыта с устойчивостью частоты) отношение $\frac{m}{n}$ называют статистической вероятностью события A.

В дальнейшем будет доказано (закон больших чисел Бернулли), что если для события A определена его классическая вероятность p, то частное $\frac{m_n}{n}$, где m_n случайная величина, выражающая количество наступлений события A в n независимых друг от друга испытаниях, при больших n «почти всегда» мало отличается от p. Таким образом, известное из практики явление оказывается строго доказанным математическим утверждением.

Следует заметить, что статистическое определение вероятности в некоторых случаях единственно доступно для измерения и исследования: действительно, далеко не всегда можно изучать случайные события с помощью пространства элементарных событий. Например, при изучении стрельбы по мишени невозможно указать разумную модель пространства элементарных событий, отражающую существенные стороны исследуемых испытаний.

1.8. Геометрические вероятности

Рассмотрим, наконец, вопрос о том, что называется вероятностью события в строго математическом смысле. Строгое определение понятия вероятности развивает идею конечного пространства элементарных событий и приводится в солидных учебниках по теории вероятностей. Здесь будут указаны лишь главные черты такого определения.

Пусть дано некоторое множество X (пространство элементарных событий, описанное в п. 2). Изучаемые события представляют собой подмножества в X. Задана также функция p, которая подмножествам в X сопоставляет число из числового отрезка $[0,1]$.Требуется, чтобы эта функция обладала свойством аддитивности, т.е. чтобы для всяких двух непересекающихся подмножеств $A, B \subset X$ для которых p определена, было справедливо равенство

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B); \qquad (2)$$

кроме того, $p(\varnothing) = 0$, $p(X) = 1$.

Определение 10. Значение функции p на множестве A называется **вероятностью события** A.

Следует отметить, что множество X в отличие от п. 4[1] может быть бесконечным; например, X - отрезок числовой прямой, вся прямая, квадрат на плоскости, вся плоскость и т. п.

Часто функцию p бывает невозможно определить для всех подмножеств множества X; в этом случае ее определяют только для некоторых (так

---

[1] Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания – конечно. На практике же весьма часто встречаются испытания, число возможных исходов которых – бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо.

называемых измеримых) подмножеств (подробнее см. в солидных учебниках по теории вероятностей).

Наглядным примером вероятностной модели может служить ***геометрическая вероятность.***

Пусть X - множество точек квадрата на плоскости, т.е.

$$a \le x \le b,\ a \le y \le b,\ .$$

Для подмножества $A \subset X$ определим значение f равенством

$$p(A) = \frac{S(A)}{(b-a)^2}, \tag{3}$$

где $S(A)$ - площадь фигуры A. Ясно, что $p(X) = 1$. Свойство (2) для функции (3) выполняется, поскольку площадь объединения двух непересекающихся фигур равна сумме площадей этих фигур.

Пример. Два приятеля договорились встретиться в установленном месте в промежутке времени от 6 до 7 ч. По взаимному соглашению каждый приходит на место встречи в случайный наугад выбранный момент и ждет другого ровно 10 мин. Какова вероятность того, что приятели встретятся?

Решение. Пусть x и y означают моменты прихода на место встречи первого и второго приятеля соответственно. Такое событие удобно отметить точкой квадрата (рис.3). Условие встречи заключаются в том, что

$$|x - y| < \frac{1}{6} \tag{4}$$

(сторона квадрата соответствует часу времени, 10 мин составляет 1/6 ч).

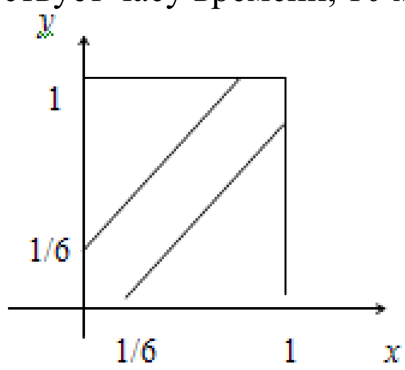


Рис.3

Множество точек, удовлетворяющих условию (4), отмечено на рисунке штриховкой. Площадь этого множества равна 11 /36. Согласно формуле (3), вероятность встречи

$$p = \frac{11/36}{(7-6)^2} = \frac{11}{36}.$$

Здесь применение формулы (3) обосновано следующими соображениями. По условию каждый из приятелей приходит на место встречи, выбирая момент прихода наугад.

Формула (3) естественным образом обобщается на случай пространства любой размерности.

Пусть $\Omega \subset R^n$. Для подмножества $A \subset \Omega$ определим значение p равенством

$$P(A) = \frac{mes(\mathrm{A})}{mes(\Omega)},$$

где $mes(A)$ – мера множества A (длина, площадь, объем и т.д. в зависимости от размерности того пространства, в котором рассматриваются данные множества).

Упражнения

1. Внутри квадрата с вершинами (0,0), (1,0), (1,1) и (0,1) наудачу выбирается точка $M(x, y)$. Найти вероятности следующих событий:

$A = \{(x, y): \max(x, y) < a, a > 0\}$,

$B = \{(x, y): \min(x, y) < a, 0 \le a \le 1\}$,

$C = \{(x, y): x^2 + y^2 < a, a > 0\}$,

$D = \{(x, y): xy < a, a > 0\}$.

2. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

3. Луч локатора перемещается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью. Какова вероятность того, что цель будет обнаружена в угловом секторе α радиан, если появление цели по любому направлению одинаково возможно?

4. Значения a и b равновозможны в квадрате $|a| \le 1$, $|b| \le 1$. Найти вероятности следующих событий:

$A =$ {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ действительны},

B = {корни квадратного трехчлена $x^2 + 2ax + b$ положительны).

5. Какова вероятность, не целясь, попасть бесконечно малой пулей в прутья квадратной решетки, если толщина прутьев равна a, а расстояние между их осями равно l $(l > a)$?

6. Иван и Петр договорились о встрече в определенном месте между одиннадцатью и двенадцатью часами. Каждый приходит в случайный момент указанного промежутка и ждет появления другого до истечения часа, но не более 15 минут, после чего уходит. Наблюдаемый результат - пара чисел (x, y), где x - время прихода Петра, y - время прихода Ивана (время исчисляется в минутах, начиная от 11 часов). Найти вероятности событий:

B = {Петр пришел после Ивана),

D = {встреча не состоялась),

F = {Ивану не пришлось ждать Петра},

K ={встреча состоялась когда до истечения часа оставалось меньше пяти минут}.

7. Из отрезка [-1, 2] наудачу взяты два числа. Какова вероятность того, что их сумма больше единицы, а произведение меньше единицы?

8. **(Задача Бюффона).** На плоскость, разграфленную параллельными прямыми линиями, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$, наудачу бросается игла длиной $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из параллельных прямых, если $l < a$.

2.1. Теорема сложения вероятностей

В п. 6 лекции№1в попытке определения вероятности события в строго математическом смысле на множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий рассмотрели функция $p(A)$ с требованием выполнения условия аддитивности и $p(\varnothing)=0$, $p(X)=1$. Затем вероятность события A определили как значение функции p на множестве A.

Ниже эту идею, следуя А.Н. Колмогорову, сформулируем в виде аксиом.

Вероятностью $p(A)$ называется числовая функция, определенная на[2] множестве событий - системе подмножеств множества Ω - пространства элементарных событий и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей):

1^0. Каждому событию A поставлено в соответствие неотрицательное число $p(A)$.

2^0. Если события $A_1, A_2, \ldots$ попарно несовместны, то

$$p(A_1 + A_2, + \cdots) = p(A_1) + p(A_2) + \cdots.$$

Заметим, что при бесконечном числе событий $A_1, A_2, \ldots$ в правой части написанного равенства стоит ***сумма ряда.***

Очевидно, если множество Ω является конечным, то любая совокупность попарно не пересекающихся подмножеств состоит лишь из конечного числа подмножеств. Отсюда ясно, что для случая конечного Ω аксиома 2^0 равнозначна такому (в общем случае более слабому) требованию:

2^{*0}. $p(A+B) = p(A) + p(B)$, если A и B несовместны.

Чтобы подчеркнуть существенное различие между аксиомами 2^0 и 2^{*0}, часто называют аксиому 2^{*0} аксиомой аддитивности, а 2^0 - аксиомой счетной аддитивности,

3^0. $p(\Omega) = 1$.

[2] поле событий (см.п.2 §1) для данного опыта, и удовлетворяющая трем условиям (аксиомам вероятностей): *Далее по тексту.*

Аксиомы 1-3 составляют основу всей теории вероятностей. Все теоремы этой теории, включая самые сложные, выводятся из них формально-логическим путем.

Укажем несколько примеров такого вывода.

Следствие. Исходя из очевидного соотношения между подмножествами

$$A+\bar{A}=\Omega,$$

и применяя аксиомы 2^0 и 3^0, получаем, что

$$p\left(A\right)+p\left(\bar{A}\right)=1,$$

т.е. сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

В качестве другого следствия аксиом выведем следующее утверждение.

Теорема 1. Вероятность суммы двух совместных событий равна сумма вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB), \qquad (*)$$

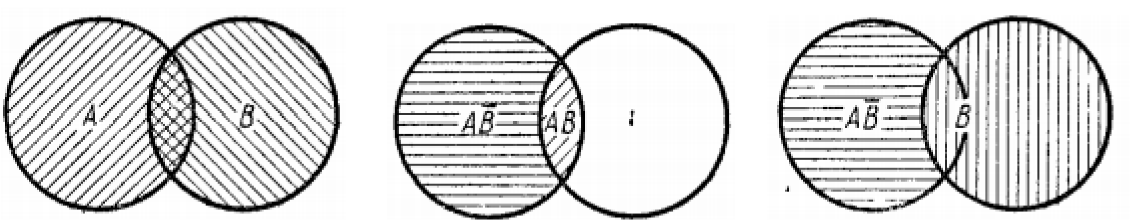
Доказательство. Рассмотрим очевидные соотношения между событиями (как между подмножествами множества Ω):

$$A=AB+A\bar{B}, \quad A+B=B+A\bar{B}.$$

Применяя к обоим равенствам аксиому сложения, получим два числовых
равенства:

$$p\left(A\right)=p\left(AB\right)+p\left(A\bar{B}\right), \qquad p\left(A+B\right)=p\left(B\right)+p\left(A\bar{B}\right).$$

Вычитая из последнего равенства предыдущее, приходим к формуле (*).



Теорема 1 допускает следующее обобщение.

Теорема 2 (обобщенная теорема сложения вероятностей). Если A_1, A_2, …, A_n совместные события, то справедливо

$$P(A_1+A_2+...+A_n=P(A_1)+...+P(A_n)-P(A_1A_2)-\cdots-p(A_{n-1}A_n)+$$
$$+p(A_1A_2A_3)+p(A_1A_2A_4)+\cdots+p(A_{n-2}A_{n-1}A_n)-\cdots.$$

Доказательство опускаем.

2.2. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.

Определение 1. Событие A называется ***независимым*** от события B, если вероятность события A не зависит от того, наступило событие B или нет. В противном случае событие A называется ***зависимым*** от события B.

Комментарий к определению 1. В дальнейшем будет доказано, что если случайное событие A не зависит от B, то и B не зависит от A.

Примеры

1. Монету подбрасывают два раза. Событие A состоит в том, что в первый раз выпадет герб, а событие B - в том, что во второй раз выпадет решка. Эти события, очевидно, независимы, поскольку второе бросание никак не может повлиять на первое.

2. Из деревьев леса наудачу выбирают одно. Событие A состоит в том, что дерево высокое (выше некоторого уровня, равного, например, 15 м), а событие B - в том, что дерево толстое (скажем, диаметр ствола больше 1 м). Эти события зависимы, поскольку вероятность выбрать высокое дерево увеличивается, если выбирать его среди толстых деревьев.

Определение 2. Вероятность наступления события A при условии, что событие B наступило, **называется *условной вероятностью*** и обозначается $p_B(A)$.

Теорема 1 (теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что A произошло, т. е.

$$p(AB) = p(A)\,p_A(B). \tag{1}$$

Для независимых событий A и B справедливо равенство

$$p(AB) = p(A)\,p(B). \tag{2}$$

Доказательство. Убедимся в справедливости теоремы для случая конечного пространства элементарных исходов.

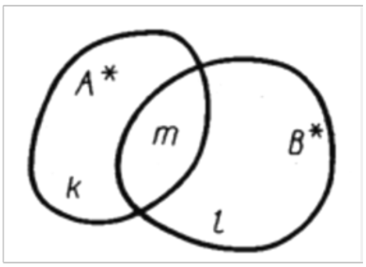


Рис. 1

Пусть событиям A и B соответствуют множества A^* и B^*, изображенные на рис. 1. Далее, пусть область A^* содержит k точек, область B^* -

l точек и в пересечении $A^* \cap B^*$ содержится m точек; всего же в пространстве элементарных исходов имеется n точек. По определению, $p(A)=\dfrac{k}{n}$, $p(AB)=\dfrac{m}{n}$ (произведение AB изображается множеством $A^* \cap B^*$.

Заметим, что условная вероятность $p_A(B)=\dfrac{k}{m}$; действительно, событию B при условии, что A произошло, благоприятствуют m элементарных исходов, а наступление события A означает наступление одного из k элементарных исходов. Так как $\dfrac{m}{n}=\dfrac{k}{n}\cdot\dfrac{m}{k}$, то

$$p(AB)=p(A)\,p_A(B)\ ,$$

т. е. имеет место равенство (1).

В случае, когда событие B не зависит от события A ,имеем $p(B)= = p_A(B)$ и равенство (1) примет вид $p(AB)=p(A)\,p(B)$.

Теперь введем более широкое понятие независимости, а именно:

Определение 3. Говорят, что событие A не зависит от B если выполняется равенство (2).

В дальнейшем независимость A от B будет пониматься как выполнение равенства (2).

Следствие 1. Если случайное событие B не зависит от A, то и A не зависит от B.

Действительно, по условию $p(AB)=p(A)\,p(B)=p(B)\,p(A)$; кроме того, по теореме умножения вероятностей $p(AB)=p(B)\,p_B(A)$. Поэтому в случае $p(B)\neq 0$ имеем $p(A)=p_B(A)$, т. е. событие A не зависит от B.

Иначе говоря, отношение независимости является симметричным. Поэтому в дальнейшем мы можем говорить просто о независимых событиях A и B.

Следствие 2. Нетрудно видеть, что если A и B независимы, то независимы также события $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Примеры

1. В урне находятся 3 черных и 2 белых шара. Из урны извлекают последовательно (без возвращения) два шара. Событие A состоит в том, что первым будет взят белый шар, а событие B - в том, что второй шар окажется черным. Найти вероятность произведения (т.е. совместного наступления) событий A и B.

Решение

В силу теоремы умножения вероятностей имеем

$$p(AB) = p(A)\,p_A(B).$$

Очевидно, что $p(A) = \frac{2}{5}$. Так как после извлечения белого шара в урне осталось 4 шара -1 белый и 3 черных, то при этих условиях вероятность извлечения черного шара $p_A(B) = \frac{3}{4}$. Итак, $p(AB) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$.

2. Какова вероятность выпадения двух гербов при двукратном бросании монеты?

Решение

Пусть A - выпадение герба при первом бросании, а B - выпадение герба при втором бросании; тогда $p(AB) = p(A)\,p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Аналогично, применяя теорему умножения несколько раз, получаем: вероятность того, что при n бросаниях монеты герб выпадает n раз, равна $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Замечание. Выразим условную вероятность из соотношения (1), считая $p(A) \neq 0$:

$$p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)}. \tag{3}$$

Пример 1. Все грани игральной кости заклеены непрозрачной бумагой: грани 1, 2, 3 – красной, грани 4, 5, 6 – черной. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

Решение

Очевидно, мы должны найти условную вероятность $p_A(B)$, где события B есть выпадение четного числа очков, а событие A – выпадение числа очков, большего 3. Имеем:

$$p_A(B) = \frac{p(AB)}{p(A)} = \frac{2/6}{3/6} = \frac{2}{3}.$$

Для сравнения отметим, что безусловная вероятность события B (просто $P(B)$) равна $1/2$.

Пример 2. Из колод игральных карт наугад выбирают одну карту. Пусть событие A заключается в том, что вынутая карта является «тузом», а события B – в том, что карта красной масти («бубновая» или «червовая»). Интуитивная ясно, что A не зависит от B (цена карты не зависит от масти). Проверим это подсчетом. Так как

$$p(A)=\frac{4}{36},\quad p(B)=\frac{18}{36},\quad p(AB)=\frac{2}{36},$$

то равенство (2) выполняется. Следовательно, события A и B независимы.

В практических вопросах для установления независимости одного события от другого редко прибегают к проверке равенства (2). Обычно при этом довольствуются интуитивными соображениями. Так, например, если бросают подряд две монеты, то ясно, что выпадение той или другой стороны на одной монете не оказывает никакого влияния на условия бросания другой, и, значит, следующие два события: выпадение герба на одной монете (событие A) и выпадение герба на другой (событие B) - являются независимыми.

Определение 3. Несколько событий называют ***попарно независимыми,*** если каждые два из них независимы.

Пример 3. Монета брошена 3 раза. Пусть A, B, C - события, состоящие в появлении герба соответственно в первом, втором и третьем испытаниях. Ясно, что каждые два из рассматриваемых событий (т. е. A и B, A и C, B и C) - независимы.

Таким образом, события A, B и C - попарно независимые.

Определение 4. Несколько событий называют ***независимыми в совокупности,*** если каждое из них и любая комбинация остальных событий (содержащая либо все остальные события, либо часть из них) есть события независимые.

Например, если события A_1, A_2 и A_3 независимые в совокупности, то независимыми являются события: A_1 и A_2, A_1 и A_3, A_2 и A_3, A_1A_2 и A_3, A_1A_3 и A_2, A_2A_3 и A_1.

Комментарий к определению 4. Если несколько событий независимы попарно, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности. В этом смысле требование независимости событий в совокупности сильнее требования их по парной независимости.

Привести пример, показывающий, что из попарно независимости событий A, B, C не следует их независимость в совокупности.

Теорема 2 (обобщенная теорема умножения вероятностей). Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$p\left(A_1A_2...A_n\right)=p\left(A_1\right)\cdot p_{A_1}\left(A_2\right)\cdot p_{A_1A_2}\left(A_3\right)...p_{A_1A_2...A_{n-1}}\left(A_n\right)\ , \tag{4}$$

где $p_{A_1A_2...A_{n-1}}\left(A_n\right)$ - вероятность события, вычисленная в предположении, что события $A_1, A_2,..., A_{n-1}$ наступили.

Для нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$p\left(A_1A_2...A_n\right)=p\left(A_1\right)p\left(A_2\right)...p\left(A_n\right)\ . \tag{5}$$

Комментарий к теореме 2. Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым, т.е. безразлично, какое событие считать первым, вторым и т.д.

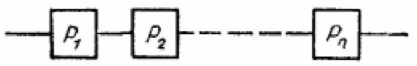
Доказательство производится методом математической индукции.

Теперь введем более широкое понятие независимости в совокупности, а именно:

Определение 5. События $A_1, A_2,..., A_n$ называются ***независимыми в совокупности,*** если выполняется следующее условие: каково бы ни было подмножество $\{i_1, i_2..., i_k\}$ множеств $\{1, 2,..., n\}$ справедливо равенство

$$p(A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_k})=p(A_{i_1})p(A_{i_2})...p(A_{i_k}) \tag{6}$$

Пример 4. Электрическая схема состоит из ***n*** последовательно соединенных блоков.



Надежность (т.е. вероятность безотказной работы) каждого блока равна соответственно $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схеме в целом.

Решение

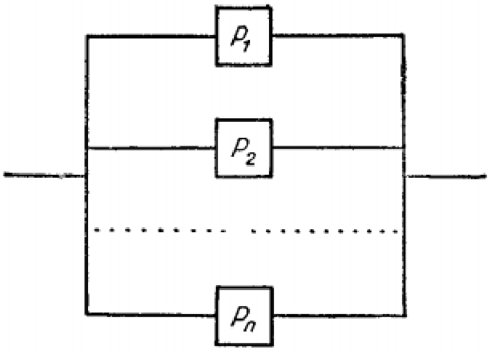
Событие, заключающееся в исправной работе i-го блока, обозначим A_i; исправность схемы в целом обозначим A. Так как блоки собраны последовательно, то A имеет место в том и только в том случае, когда имеют место все A_i. Поэтому

$$A=A_1A_2...A_n,$$

откуда в силу независимости событий $A_1, A_2,..., A_n$ следует

$$p(A)=p(A_1)p(A_2)...p(A_n)=p_1p_2...p_n.$$

Та же самая задача для схемы из параллельно соединенных блоков приводит к другому результату.



В этом случае выход схемы из строя происходить лишь в том случае, когда выходят из строя все блоки. Это значит, что

$$\overline{A} = \overline{A}_1\overline{A}_2...\overline{A}_n$$

и, следовательно,

$$p(\overline{A}) = p(\overline{A}_1)\,p(\overline{A}_2)...p(\overline{A}_n) = (1-p_1)(1-p_2)...(1-p_n).$$

Таким образом, надежность всей схемы оказывается равной

$$p(A) = 1-(1-p_1)(1-p_2)...(1-\mathrm{p}_n).$$

Пример 5. Слово «лотос», составленное из букв-кубиков, рассыпано на отдельные буквы, которые затем сложены в коробке. Из коробки наугад извлекаются одна за другой три буквы. Какова вероятность того, что при этом появится слово «сто».

Решение. Введем обозначение для событий:

$$A_1 = \{\text{первой извлечена буква } \ll c \gg\};$$

$$A_2 = \{\text{второй извлечена буква } \ll \text{т} \gg\};$$

$$A_3 = \{\text{третьей извлечена буква } \ll o \gg\};$$

$$A = \{\text{получилось слово} \ll \text{сто} \gg\}.$$

Очевидно, $A = A_1A_2A_3$. Имеем последовательно:

$$p(A_1) = \frac{1}{5};\;\; p(A_1A_2) = p(A_1)\,p_{A_1}(A_2) = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20};$$

$$p(A_1A_2A_3) = p(A_1A_2)\,p_{A_1A_2}(A_3) = \frac{1}{20}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{30}.$$

Итак, $p(A) = \dfrac{1}{30}.$

2.3. Полная группа событий

Определение. ***Полной группой*** называют систему $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместных событий, если появления в результате опыта одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример 6 . Стрелок производит по мишени 2 выстрела. Следующие события A_1, - одно попадание; A_2 - два попадания; A_3 – промах образуют полную группу.

Для событий, образующих полную группу, имеет место следующая

Теорема 3. Сумма вероятностей событий, образующих полную группу, равна единице:

$$p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)=1.$$

Доказательство: Так как появление одного из событий полной группы достоверно, а вероятность достоверного события равна единице, то $p(A_1+A_2+\cdots+A_n)=1$. Так как любые два события полной группы несовместны, то по теореме сложения несовместных событий

$$p(A_1+A_2+\cdots+A_n)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_n)=1.$$

С помощью понятия полной группы событий можно дать другое определение противоположных событий.

Противоположными событиями называют два события, образующие полную группу.

На основании приведенной выше теоремы, сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$p(A)+p(\overline{A})=1.$$

Как правило, при рассмотрении противоположных событий вероятность одного из них обозначают p, а вероятность другого q.

Таким образом, $p+q=1$.

Пример 7. Вероятность того, что день будет ясный равна 0,7. Найти вероятность того, что день будет дождливый.

Решение

По условию $p=0,7$. Тогда как $q=1-p$. Т.е. $q=1-0,7=0,3$.

Очень часто при решении задач на нахождение вероятности события A бывает удобно найти прежде вероятность противоположного события $\overline{A}$, а затем вероятность искомого события по формуле:

$$p(A)=1-p(\overline{A}).$$

Пример 8. Студент из 50 экзаменационных вопросов знает ответ на 30 вопросов. Какова вероятность того, что из заданных ему на удачу 5 вопросов он знает ответ хотя бы на один вопрос?

Решение

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что студент знает ответ хотя бы на один вопрос. Тогда событие $\overline{A}$ - студент не знает ответа ни на один вопрос - противоположное событие. Вероятность события $\overline{A}$ легко находится по классическому определению вероятности:

$$p(\overline{A}) = \frac{m}{n} = \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Тогда искомая вероятность

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{20}^5}{C_{50}^5}.$$

Пример 9. В продукции завода брак составляет 5 % от общего количества выпускаемых деталей. Для контроля отобрано 20 деталей. Какова вероятность того, что среди них имеется хотя бы одна бракованная?

Решение

Для любой детали из продукции завода вероятность быть бракованной равна по условию $p = 0,05 = p\left(A_k\right),\ k = 1,2,...,20,$ где событие

$A_k = \{\ k$-я по счету извлеченная деталь бракованная$\}$.

Очевидно, нас интересует событие $A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}$. В условиях отлаженного технологического процесса можно считать, что события $A_1, A_2, ..., A_{20}$ независимы в совокупности. Тогда очевидно, что вероятность осуществления хотя бы одного $A_1, A_2, ..., A_{20}$ проще вычисляется не по формуле сложения , а с помощью формулы умножения:

$$p\left(A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}\right) = 1 - p\left(\overline{A_1 + A_2 + \cdots + A_{20}}\right) =$$
$$= 1 - p\left(\overline{A_1}\right) p\left(\overline{A_2}\right) \cdots p\left(\overline{A_{20}}\right) = 1 - 0,95^{20} \approx 0,64.$$

Упражнения

1. Из 100 студентов, находящихся в аудитории, 50 человек знают английский язык, 40 - французский и 35 - немецкий. Английский и французский языки знают 20 студентов, английский и немецкий - 8, французский и немецкий - 10. Все. три языка знают 5 человек. Один из студентов вышел из аудитории. Вычислить вероятности следующих событий:

A = {вышедший знает или английский или французский язык},

B = {вышедший знает только английский язык},

C = {вышедший не знает ни одного языка}.

2. Статистика, собранная среди студентов кредитно-экономического факультета Ташкентского финансового института, обнаружила следующие факты: 60 % всех студентов занимаются спортом, 30 % участвуют в художественной самодеятельности, 50 % работают в банке, 20 % занимаются спортом и участвуют в художественной самодеятельности, 10 % занимаются спортом и работают в банке, 5 % участвуют в самодеятельности и работают в

банке, наконец, 5 % участвуют во всех трех видах деятельности. Корреспондент местной газеты подошел к наудачу выбранному студенту. Найти вероятности следующих событий:

A = {студент занимается по крайней мере одним из двух видов деятельности: занимается спортом или участвует в художественной самодеятельности};

B = (студент занимается одним только спортом},

C = {студент занимается только одним видом деятельности};

D = {студент занимается двумя и только двумя видами деятельности}.

3. **(Задача де Мере).** Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5 хотя бы один раз появилась сумма очков, рарная 12?

2.4. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.

Следствием основных теорем – теоремы сложения вероятностей и теоремы умножения вероятностей – является так называемая формула полной вероятности. А следствием теоремы умножения и формулы полной вероятности является так называемая теорема гипотез или формула Байеса. Этот пункт посвящается этим формулам.

2.4.1. Одним из эффективных методов подсчета вероятностей является формула полной вероятности, с помощью которой решается широкий круг задач.

Теорема 4 (теорема о полной вероятности). Пусть $B_1, B_2, ..., B_n$ - попарно несовместные события, имеющие соответственно вероятности $p(B_1)$, $p(B_2)$, ..., $p(B_n)$. Пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$, и $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), ..., p_{B_n}(A)$ - условные вероятности события A при условии, что $B_1, B_2, ..., B_n$ наступили. Тогда вероятность $p(A)$ события A равна сумме произведений вероятностей событий B_n на условные вероятности $p_{B_n}(A)$:

$$p(A) = p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + ... + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A). \qquad (7)$$

Комментарий к теореме 4

1) Вероятности $p_A(B_i)$ называются послеопытными (апостериорными) вероятностями событий B_i, а вероятности $p(B_i)$ - доопытными (априорными) вероятностями событий B_i). Эти вероятности различаются, как будет видно из примеров.

2) События $B_1, B_2, ..., B_n$ называются часто гипотезами

Доказательство. По условию,

$$A\left(B_1+B_2+\ldots+B_n\right)=A \text{ и } AB_1+AB_2+\ldots+AB_n=A.$$

Применяя сначала теорему сложения, а затем теорему умножения вероятностей, получим

$$p(A)=p(AB_1)+p(AB_2)+\ldots+p(AB_n)=$$
$$=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+\ldots+p(B_n)\cdot p_{B_n}(A).$$

Формула (1) называется ***формулой полной вероятности.***

Пример 10. Производится серия из четырех выстрелов по некоторому объекту. Вероятности попадания в цель одного, двух, трех и четырех снарядов заданы таблицей

1	2	3	4
0,4	0,26	0,22	0,03

Вероятности разрушения объекта при условии попадания одного, двух, трех и четырех снарядов даны в таблице

1	2	3	4
0,5	0,7	0,8	0,99

Найти вероятность разрушения объекта.

Решение

Первая таблица задает вероятности $p(B_1), p(B_2), p(B_3), p(B_4)$, а вторая - вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), p_{B_3}(A), p_{B_4}(A)$ (событие B_i состоит в попадании в цель i (i=1, 2, 3, 4) снарядов, событие А состоит в разрушение мишени). По формуле (1) находим

$$p(A) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,26 \cdot 0,7 + 0,22 \cdot 0,8 + 0,03 \cdot 0,99 = 0,5877.$$

Пример 11. Статистика запросов кредитов в банке такова: 10% - государственные органы, 20% - другие банки, остальные - физические лица. Вероятности того, что взятый кредит не будет возвращён, составляют 0,01, 0,05 и 0,2 соответственно. Определить, какая доля кредитов в среднем не возвращается.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0,2;\quad p(B_2)=0,2;\ p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0,7\,\mathrm{P}\{H_1\}=0,1,$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0,01;\quad p(B_2)=0,005;\quad p(B_3)=0,2.$$

По формуле полной вероятности

$$p(A)=p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)+p(B_3)\cdot p_{B_3}(A)=$$
$$=0,01\cdot 0,1+0,05\cdot 0,02+0,2\cdot 0,7=0,151.$$

Упражнения

1. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Какова вероятность того, что случайно выбранный из партии транзистор будет признан дефектным?

2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80 % всего времени полета, условия перегрузки - в 20 %. Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,1, в условиях перегрузки - 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

3. На шахматную доску ставят наудачу двух слонов, белого и черного. Какова вероятность того, что слоны побьют друг друга?

4. В продажу поступают телевизоры трех заводов. Продукция первого завода содержит 20 % телевизоров со скрытым дефектом, второго - 10 % и третьего - 5 %. Какова вероятность приобрести исправный телевизор, если в магазин поступило 30 % телевизоров с первого завода, 20 % - со второго и 50 % - с третьего?

5. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры наудачу выбираются два мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются еще два мяча. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами?

6. Три стрелка, вероятности попадания которых при одном выстреле в мишень в неизменных условиях постоянны и соответственно равны $p_1=0,8$, $p_2=0,7$, $p_3=0,6$, делают по одному выстрелу в одну и ту же мишень. Вычислить вероятность события A = {в мишени окажется ровно две пробоины}, приняв в качестве гипотез элементарные исходы данного опыта.

7. Из десяти студентов, пришедших сдавать экзамен по теории вероятностей и взявших билеты, Иванов и Петров знают 20 билетов из 30, Сидоров плохо занимался весь семестр и успел повторить только 15 билетов, осталь-

ные студенты знают все 30 билетов. По прошествии отведенного времени на подготовку экзаменатор наудачу вызывает отвечать одного из студентов. Какова вероятность того, что вызванный сдал экзамен, если знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а при незнании билета можно сдать экзамен лишь с вероятностью 0,1?

8. В первой урне находится 6 белых и 4 черных шара, во второй - 3 белых и 2 черных. Из первой урны наудачу извлекают сразу 3 шара, и шары того цвета, которые окажутся в большинстве, опускают во вторую урну и тщательно перемешивают. После этого из второй урны наудачу извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

2.4.2. Теперь приступаем к обсуждению формул Байеса.

Теорема 5 (теорема Байеса). Пусть события $B_1, B_2, ..., B_n$ попарно несовместны и пусть событие A может наступить только вместе с одним из событий $B_1, B_2, ..., B_n$ - Известны вероятности $p(B_1), p(B_2), ..., p(B_n)$ событий $B_1, B_2, ..., B_n$, и условные вероятности $p_{B_1}(A), p_{B_2}(A), ..., p_{B_n}(A)$ события A при условиях $B_1, B_2, ..., B_n$. Известно также, что событие A наступило. Тогда вероятности событий $B_1, B_2, ..., B_n$ при условии, что событие A наступило, находятся по формулам

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(B_1) \cdot p_{B_1}(A) + p(B_2) \cdot p_{B_2}(A) + ... + p(B_n) \cdot p_{B_n}(A)}, \quad i = 1, 2, ..., n. \quad (8)$$

Комментарий к теореме 5.

1) Знаменатель в правой части формулы (8) совпадает с правой частью формулы (7) и равен $p(A)$.

2) Формула (8) дает вероятности гипотезы B_i, при которой наступило событие A.

Доказательство. Согласно теореме умножения вероятностей, имеем

$$p(AB_i) = p_A(B_i) \cdot p(A) = p(B_i) \cdot p_{B_i}(A).$$

Отсюда

$$p_A(B_i) = \frac{p(B_i) \cdot p_{B_i}(A)}{p(A)} \quad (9)$$

Подставляя в знаменатель правой части равенства (9) вместо $p(A)$ правую часть формулы (7), получаем соотношение (8).

Формулы (8) называются ***формулами Байеса (или формулами гипотез).***

Пример 12. Поломка прибора (событие A) может быть вызвана одной из трех причин B_1, B_2, B_3, вероятности которых $p(B_1)$= 0,7, $p(B_2)$=0,2, $p(B_3)$ = 0,1. При наличии этих причин поломка прибора происходит с вероятностями $p_{B_1}(A)=0{,}1$, $p_{B_2}(A)=0{,}2$, $p_{B_3}(A)=0{,}2$. Известно, что прибор вышел из строя. Найти вероятности $p_A(B_1)$, $p_A(B_2)$, $p_A(B_3)$.

Решение. Используя формулы (8), получим

$$p_A(B_1)=\frac{0{,}7\cdot 0{,}1}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}07}{0{,}13}=\frac{7}{13};$$

$$p_A(B_2)=\frac{0{,}2\cdot 0{,}2}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}04}{0{,}13}=\frac{4}{13};$$

$$p_A(B_3)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}2}{0{,}7\cdot 0{,}1+0{,}2\cdot 0{,}2+0{,}1\cdot 0{,}2}=\frac{0{,}02}{0{,}13}=\frac{2}{13}.$$

Из результатов вычислений видно, что апостериорные вероятности отличаются от априорных.

Пример 13. В условиях примера 11 начальнику кредитного отдела доложили, что получено факсимильное сообщение о неисполнении обязательств по возврату кредита, в котором очень плохо пропечаталось имя клиента. Найти вероятность того, что кредит не возвращает какой-либо банк.

Решение

Пусть событие А состоит в том, что взятый кредит не возвращается, гипотеза B_1 - в том, что запрос на этот кредит поступил от государственного органа, гипотеза B_2 - в том, что запрос на кредит поступил от другого банка, гипотеза B_3 - в том, что запрос на кредит поступил от физического лица. По условию вероятности гипотез составляют

$$p(B_1)=0{,}2;\quad p(B_2)=0{,}2;\; p(B_3)=1-p(B_1)-p(B_2)=0{,}7\,\mathrm{P}\{H_1\}=0{,}1,$$

Апостериорные вероятности, в свою очередь, по условию равны

$$p(B_1)=0{,}01;\quad p(B_2)=0{,}05;\quad p(B_3)=0{,}2.$$

По формуле Байеса полной вероятности

$$p_A(B_2)=\frac{p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}{p(A)}=\frac{10}{151}\approx 0{,}66,$$

где вероятность $p(A)=0{,}151$ рассчитана по формуле полной вероятности в примере 10.

Пример 14. Страховая компания занимается страхованием жизни. 10% застрахованных в этой компании являются курильщиками. Если застрахованный не курит, вероятность его смерти на протяжении года равна 0,01. Если же он курильщик, то эта вероятность равна 0,05.

Какова доля курильщиков среди тех застрахованных, которые умерли в течение года?

Решение

Введем события:

$B_1 =$ {застрахованный - курильщик};

$B_2 =$ {застрахованный - не курильщик};

$A =$ {застрахованный умер в течение года}.

Условие задачи означает, что

$$p(B_1)=0{,}1;\quad p_{B_2}(A)=0{,}05;\quad p_{B_3}(A)=0{,}01.$$

Кроме того, поскольку события B_1 и B_2 образуют полную группу попарно несовместимых событий, $p(B_2)=1-p(B_1)=1-0{,}1=0{,}9.$

Интересующая нас вероятность – это $p_A(B_1)$. Используя формулу Байеса, мы имеем:

$$p_A(B_1)=\frac{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)}{p(B_1)\cdot p_{B_1}(A)+p(B_2)\cdot p_{B_2}(A)}=\frac{0{,}1\cdot 0{,}05}{0{,}1\cdot 0{,}05+0{,}9\cdot 0{,}01}=\frac{5}{14}\approx 0{,}36.$$

Упражнения

1. Страховая компания продает договора страхования жизни трех категорий: стандартные, привилегированные и ультрапривилегированные. 50% всех застрахованных являются стандартными, 40% - привилегированными и 10% - ультрапривилегированными. Вероятность смерти в течение года для стандарного застрахованного равна 0,010, для привилегированного - 0,005, а для ультрапривилегированного [3] - 0,001.

Чему равна вероятность того, что умерший застрахованный является ультрапривилегированным ?

2. Партия транзисторов, среди которых 10 % дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова, что с вероятностью 0,95 обнаруживается дефект (если он есть) и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

3. Изучается три вида дефектов запоминающих устройств, выполненных на интегральных схемах: дефекты схем обрамления (гипотеза B_1); де-

[3] Привилегированность договора/застрахованного означает меньший риск для страховой компании (по результатам андеррайтинга).

фекты, вызванные паразитными связями между ячейками (гипотеза B_2); и дефекты адресных шин (гипотеза B_3). Известно, что

$$p(B_1)=0{,}1;\ p(B_2)=0{,}6;\ p(B_3)=0{,}3.$$

Диагностика запоминающих устройств производится с помощью набора тестов $T_1, T_2, ..., T_n$, каждый из которых проверяет определенное состояние ячейки памяти. Наблюдаемый результат - состояние выбранной ячейки по отношению к каждому тесту. Пусть диагностика произведена и наблюдался некоторый результат (произошло событие А). Известно до опыта, что

$$p_{B_1}(A)=0{,}4,\ p_{B_2}(A)=0{,}2,\ p_{B_3}(A)=0{,}3.$$

Установить, какая из гипотез имеет наибольшую апостериорную вероятность (т.е. какой из дефектов наиболее вероятен).

4. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 20% с заболеванием M, 30% с заболеванием L. Вероятность полного излечения болезни K равна 0,7, для болезней L и M эти вероятности равны соответственно 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

5. Продукция, изготавливаемая в цехе, проверяется двумя контролерами. Вероятность того, что деталь попадет на проверку к первому контролеру равна 0,6; ко второму контролеру 0,4. Вероятность принять качественную деталь за бракованную равна для первого контролера 0,06, для второго контролера эта вероятность 0,02. Среди забракованных деталей оказалась качественная. Найти вероятность того, что она проверялась первым контролером.

6. В первой урне 1 белый и 2 черных шара, во второй – 100 белых и 100 черных шаров. Из второй урны переложили в первую один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар ранее находился во второй урне, если известно, что он белый.

7. Среди поступающих на сборку деталей с первого станка 0,1% бракованных, со второго 0,2%, с третьего 0,25%, с четвертого 0,5%. Производительности их относятся соответственно как 4:3:2:1. Взятая наудачу деталь оказалась стандартной. Найти вероятность того, что она изготовлена на третьем станке.

8. В коробки находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объему. При случайном подбрасывании неправильной игральной кости шестерка появилась с вероятностью ⅓, единица с вероятностью 1/9, остальные цифры выпадают с одинаковой веро-

ятностью. Наудачу извлеченная из коробки игральная кость была подброшена, и в результате выпало 6 очков. Найти вероятность того, что была подброшена правильная игральная кость.

9. В группе из 25 человек, пришедших сдавать экзамен по теории вероятности, имеется 10 отличников, 7 подготовленных хорошо, 5 удовлетворительно и 3 человека плохо подготовлены. Отличники знают все 25 вопросов программы, хорошо подготовленные – 20, подготовленных удовлетворительно – 15, и плохо подготовленные знают лишь 10 вопросов. Вызванный наудачу студент ответил на два заданных вопроса. Найти апостериорные вероятности гипотез:

$H_1 = \{$студент подготовлен отлично или хорошо$\}$;

$H_2 = \{$студенты подготовлены удовлетворительно$\}$;

$H_3 = \{$студент подготовлен плохо$\}$.

При практическом применении теории вероятностей часто приходится встречаться с задачами, в которых одно и то же испытание или аналогичные испытания повторяются неоднократно. В результате каждого испытания может появиться или не появиться некоторое событие A, причем нас интересует не результат каждого отдельного испытания, а общее число появлений события A в результате испытаний. Например, если производится серия выстрелов по одной и той же цели, нас, как правило, интересует не результат каждого выстрела, а общее число попаданий. Такие задачи рассматриваются на этой и следующей лекциях. Оказываются, при определенных условиях, они решаются весьма просто.

3.1. Последовательность независимых испытаний (схема Бернулли).

Пусть производится серия из n испытаний, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Пусть при этом выполнено следующее условие: вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна, т.е. не зависит ни от номера испытания, ни от результатов предыдущих испытаний.

Это условие означает, что последовательность испытаний независима (вероятность p не зависит от результатов предыдущих испытаний).

Определение. Последовательность испытаний, удовлетворяющих указанному условию, называется ***последовательностью независимых испытаний (или схемой Бернулли).*** Схема Бернулли полностью определяется двумя числами - натуральным числом n, означающим количество испытаний, и числом p ($0 < p < 1$), означающим вероятность наступления события A в одном испытании (безразлично, в каком по счету).

Примеры. Следующие серии опытов представляют собой конкретные модели схемы Бернулли:

1. Монету подбрасывают n раз; вероятность появления герба в одном испытании есть $p = 1/2$.

2. Производят n выстрелов по мишени. Предполагается, что вероятность попадания в мишень при каждом выстреле постоянна и равна p.

Отметим, однако, что если в процессе стрельбы стрелок пристрелялся и стал лучше поражать мишень, то такая последовательность испытаний не является схемой Бернулли.

3. Из кучи зерна отбирают n зерен для проверки их на всхожесть. Вероятность того, что каждое зерно при проверке дает положительный результат, постоянна (так будет, например, в том случае, когда куча зерна большая, а зерна отбирают наугад после перемешивания).

В связи со схемой Бернулли рассматривают такие задачи:

1. Найти вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n испытаний событие A наступит ровно k раз. Решение этой задачи дает формула Бернулли.

2. Найти вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что в серии из n испытаний количество k наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le k \le k_2$.

3. Решить задачу 1 для больших чисел n и k с (формула Бернулли, дающая решение задачи 1, неудобна для вычислений при больших n и k). Задача 3 решается с помощью локальной теоремы Муавра- Лапласа.

4. Решить задачу 2 для больших чисел n, k_1, k_2 (формула Бернулли мало пригодна для вычислений $P_n(k_1, k_2)$ при больших n, k_1, k_2). Задача решается с помощью интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

3.2. Формула Бернулли

Теорема 1. Вероятность $P_n(k)$ того, что в последовательности из n испытаний в схеме Бернулли событие A наступит ровно n раз, выражается формулой

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ число сочетании из n элементов по k; p - вероятность наступления события A в одном испытании; $q = 1 - p$ - вероятность ненаступления события A в одном испытании.

Доказательство. Рассмотрим последовательность из k плюсов и $n-k$ минусов, расположенных в произвольном, но фиксированном порядке. Каждая такая последовательность задает событие при «n-кратном испытании по схеме Бернулли: знак « + » или «-» на k-м месте последовательности означает соответственно наступление или ненаступление события A при k-м испытании. Вероятность такого события (расположение k плюсов и $n-k$ минусов в произвольном, но фиксированном порядке) в силу теоремы умножения вероятностей равна $p^k q^{n-k}$ и не зависит от порядка плюсов и минусов в рассматриваемой последовательности. При этом последовательности с различным расположением k плюсов и $n-k$ минусов определяют различные попарно несовместные события. Количество последовательностей из k плюсов и $n-k$ минусов равно числу сочетаний из n элементов по k. Действительно, последовательность будет полностью определена, если из множества номеров $\{1,2,3,...,n\}$ выбрано k штук и плюсы последовательности поставлены на места с номерами из выбранного множества.

Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

где, как известно, число сочетаний из n элементов по k выражается формулой

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} .$$

Примеры

1. Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты выпадет ровно 3 герба.

Решение

Здесь $n=10,\quad k=3,\quad p=\frac{1}{2}$. Согласно формуле Бернулли, получим

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{120}{1024} .$$

2. Пусть вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $1/3$. Найти вероятность того, что из 6 выстрелов три поразят мишень.

Решение

Используя формулу Бернулли при $n=6,\ k=3,\ p=\frac{1}{3},\ q=\frac{2}{3},$ находим

$$P_6(3) = C_6^3 \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{8}{729} = \frac{160}{729} .$$

3. Пусть вероятность того, что взятое наудачу из кучи зерно окажется всхожим, равна 0,9. Какова вероятность того, что из 7 отобранных зерен ровно 5 окажутся всхожими?

Решение

Имеем

$$P_7(5)=C_7^5\,0{,}9^5\cdot 0{,}1^2=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=21\cdot 0{,}0059049=0{,}124.$$

4. В схеме Бернулли, связанной с бросанием монеты, вычислить вероятности $P_{10}(k)$, где k = 0, 1, 2, ..., 10 (т.е. вероятности того, что в 10 испытаниях герб выпадет ровно k раз).

Решение. Используя формулу Бернулли при $p=q=\frac{1}{2}$, $k=0,1,2,...,10$, получим

$$P_{10}(0)=\frac{1}{1024},\ P_{10}(1)=\frac{10}{1024},\ P_{10}(2)=\frac{45}{1024},\ P_{10}(3)=\frac{120}{1024},\ P_{10}(4)=\frac{210}{1024},$$

$$P_{10}(5)=\frac{252}{1024},\ P_{10}(6)=\frac{210}{1024},\ P_{10}(7)=\frac{120}{1024},\ P_{10}(8)=\frac{45}{1024},\ P_{10}(9)=\frac{10}{1024},$$

$$P_{10}(10)=\frac{1}{1024}.$$

Результаты вычислений иллюстрирует рис.1. Как видно из рисунка, наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5)\approx 0{,}25$. Сравнительно велики и значения $P_{10}(4)$ и $P_{10}(6)$ $(\approx 0{,}21)$; в то же время «крайние» значения k дают $P_{10}(0)=P_{10}(10)\approx 0{,}001$.

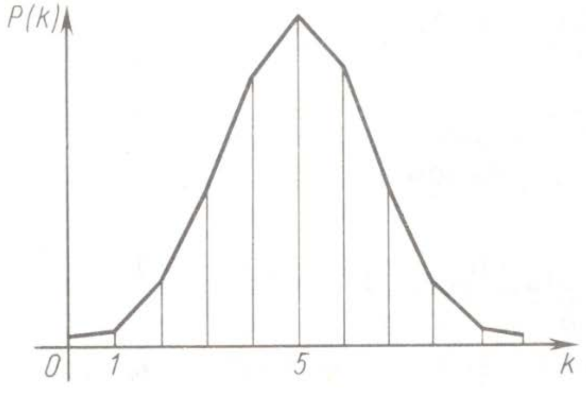


Рис. 1

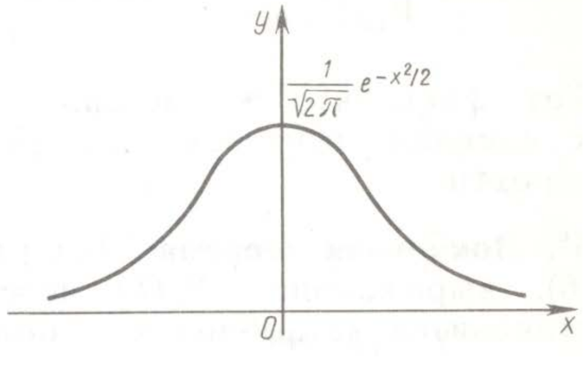


Рис. 2

Обратим внимание на характерный вид изображенной на рисунке ломаной, имеющей пик в точке $k=5$. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с кривой $y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (рис.2.). Она называется гауссовой кривой (или кривой нормального распределения) и играет исключительно важную роль в теории вероятностей.

Тот факт, что ломаная на рис. 1 и кривая на рис. 2 имеют значительное сходство, не случаен. Причины этого явления раскрываются локальной теоремой Муавра-Лапласа.

Для вычисления вероятностей $P_n\left(k_1,k_2\right)$ того, что в схеме Бернулли из n испытаний количество m наступлений события A будет находиться в пределах $k_1 \le m < k_2$, можно использовать формулу

$$P_n\left(k_1,k_2\right)=P_n\left(k_1\right)+P_n\left(k_1+1\right)+\ldots+P_n\left(k_2-1\right). \qquad (1)$$

Событие, о котором идет речь, является суммой попарно несовместных событий B_i $(i=k_1,k_1+1,\ldots,k_2-1)$, состоящих в том, что в n испытаниях событие A наступит ровно i раз; затем, используя теорему сложения вероятностей, получаем формулу (1).

В частности, вероятность того, что в n испытаниях событие наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз, находят соответственно по формулам:

$$P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(k-1\right);$$

$$P_n\left(k+1\right)+P_n\left(k+2\right)+\ldots+P_n\left(n\right);$$

$$P_n\left(k\right)+P_n\left(k+1\right)+\ldots+P_n\left(n\right);$$

$$P_n\left(0\right)+P_n\left(1\right)+\ldots+P_n\left(k\right).$$

3.3. Наивероятнейшее число появлений события в независимых испытаниях

Число k_0 (наступления события в независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p) называют наивероятнейшим, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях k_0 раз, превышает (или, но крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число k_0 определяют из двойного неравенства

$$np-q \le k_0 \le np+p\ ,$$

причем:

а) если число $np-q$ -дробное, то существует одно наивероятнейшее число k_0 ;

б) если число $np-q$ – целое, то существует два наивероятнейших числа, а именно: k_0 и k_0+1 ;

в) если число np - целое, то наивероятнейшее число $k_0 = np$.

Пример. Испытывается каждый из 15 элементов некоторого устройства. Вероятность того, что элемент выдержит испытание, равна 0,9. Найти наивероятнейшее число элементов, которые выдержат испытание.

Решение. По условию, $n = 15,\ p = 0{,}9,\ q = 0{,}1$. Найдем наивероятнейшее число k_0 из двойного неравенства

$$np - q \le k_0 \le np + p \ .$$

Подставив данные задачи, получим

$$15{\cdot}0{,}9 - 0{,}1 \le k_0 < 15{\cdot}0{,}9 + 0{,}9, \text{ или } 13{,}5 < k_0 < 14{,}4.$$

Так как k_0 - целое число и поскольку между числами 13,4 и 14,4 заключено одно целое число, а именно 14, то искомое наивероятнейшее число $k_0 = 14$.

Пример. Найти наивероятнейшее число появления герба в 10 испытаниях. (см. пример 4 из п.2)

Решение

$np - q$ = 10· 0,5 – 0,5 = 4,5 – дробное число; существует одно наивероятнейшее число k_0. Имеем $4{,}5 \le k_0 \le 5{,}5$. Следовательно, $k_0 = 5$. Нетрудно заметить, что расчеты проведенные в п.2. это подтверждает, т.е., наибольшей из вероятностей $P_{10}(k)$ является $P_{10}(5) \approx 0{,}25$.

Пример. Известно, что из числа зрителей определённой телепрограммы 70% смотрят и рекламные блоки. Группы, состоящие из трёх наугад выбранных телезрителей, опрашивают относительно содержания рекламного блока. Рассчитать вероятности числа лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Вероятность того, что наугад выбранный зритель данной телепрограммы смотрит и рекламные блоки, согласно статистическому определению вероятности, равна $p = 0{,}7$. Интерпретируя опрос трёх телезрителей как три испытания Бернулли и считая наступил событие A ситуацию, когда телезритель смотрит рекламные блоки, найдём искомые вероятности по формуле Бернулли

$$P_3(k) = C_3^k 0{,}7^k \cdot 0{,}3^{3-k} \ \ (k = 0{,}1{,}2{,}3),$$

в которой $n = 3$, $p = 3$. Отсюда имеем:

$$P_3(0) = C_3^0 0{,}7^0 \cdot 0{,}3^3 = 0{,}027; \qquad P_3(1) = C_3^1 0{,}7^1 \cdot 0{,}3^2 = 0{,}189;$$

$$P_3(2) = C_3^2 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^1 = 0{,}441; \qquad P_3(3) = C_3^3 0{,}7^3 \cdot 0{,}3^0 = 0{,}343.$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти наивероятнейшее число лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки.

Решение

Наивероятнейшее число k_0 лиц в группе, которые смотрят рекламные блоки, подчиняется неравенствам

$$np - q \le k_0 \le np + p,$$

в которых $n = 3$, $p = 3$, т.е.

$$3 \cdot 0,7 - 0,3 \le k_0 \le 3 \cdot 0,7 + 0,7 \text{ или } 1,8 \le k_0 \le 2,8,$$

откуда $k_0 = 2$. Это подтверждается и решением предыдущего примера.

Упражнения

1. Стоимость проезда в автобусе равна 3, месячный проездной билет на автобус стоит 120, а штраф за безбилетный проезд составляет 10. Петя 24 раза в месяц ездит на автобусе в институт и обратно. Он не покупает проездного билета, никогда не платит за проезд и считает, что вероятность быть пойманным и заплатить штраф равна 0,05. Сравнить стоимость проездного билета с наиболее вероятной величиной штрафа за 48 поездок.

2. В брокерской конторе для стимулирования прибыльности торговли применяется следующая система премирования сотрудников. Если сотрудник не достигал установленного дневного уровня прибыли на протяжении более трёх дней за две недели (10 рабочих дней), он теряет свою премию. Вероятность того, что сотрудник выполнит требуемую норму прибыли, составляет 0,85. Найти число премий, потерянных 100 сотрудниками этой брокерской конторы за год (50 рабочих недель).

3. Среди 12 проверяемых ревизором договоров семь оформлены неправильно. Найти вероятность того, что среди пяти договоров, произвольно отобранных ревизором для проверки, окажутся неправильно оформленными: а) ровно три договора; б) не менее трёх договоров.

4. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника три партии из четырёх или пять партий из восьми?

5. Что вероятнее: выиграть в бильярд у равносильного противника не менее трёх партий из четырёх или не менее пяти партий из восьми?

6. В течение месяца данная акция может подорожать на 1% с вероятностью 0,7 и подешеветь на 1% с вероятностью 0,3. Предполагая ежемесячные изменения цены независимыми, рассчитать вероятности того, что за три месяца цена акции возрастет: а) в $(1,01)^3$ раза; б) в $0,99 \cdot (1,01)^2$ раза.

7. Из 1000 опрошенных 700 человек поддерживают некоторую правительственную программу. Найти минимальную численность группы, в которой с вероятностью, не меньшей 0,9, хотя бы один респондент не поддерживает эту программу.

8. Среди билетов лотереи половина выигрышных. Найти минимальное число билетов, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, быть уверенным в выигрыше хотя бы по одному билету.

9. В городе работают 1000 коммерческих банков, из которых 330 допускают нарушения налогового законодательства. Определить число банков, которые должна отобрать для проверки налоговая инспекция, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,99, среди них оказался хотя бы один нарушитель законодательства.

10. В условиях задачи 9 налоговая инспекция проводит проверку 12 банков, выбирая их случайным образом. Выбранные банки проверяются независимо друг от друга. Допущенные в проверяемом банке нарушения могут быть выявлены инспекцией с вероятностью 0,8. Найти вероятность того, что в ходе этой проверки будет выявлен хотя бы один нарушитель налогового законодательства.

11. Банк имеет пять отделений. Ежедневно с вероятностью 0,3 каждое отделение, независимо от других, может заказать на следующий день крупную сумму денег. В конце рабочего дня один из вице-президентов банка знакомится с поступившими заявками. Найти вероятности следующих событий: а) поступили ровно две заявки; б) поступила хотя бы одна заявка; в) среди поступивших двух заявок есть заявка от первого отделения.

12. Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятность того, что дважды появится число, кратное трём.

Пример. (Задача о разделе ставки[4]). Петя и Маша часто играют в бильярд друг с другом, причём Петя выигрывает в два раза чаще, чем Маша. Исходя из этого, они оценили свои вероятности победить как $\frac{2}{3}$ для Пети и $\frac{1}{3}$ для Маши и начали турнир на следующих условиях: каждый выигрыш приносит одно очко, Петя для победы должен набрать двенадцать очков, а Маша - шесть. После того, как Петя набрал восемь очков, а Маша - четыре, игру пришлось прекратить, и победу решили присудить тому, у кого вероятность окончательного выигрыша больше. Определить, кому присудили победу в этом турнире.

Решение

---

[4] Такая задача возникает при определении доли инвестора, который хочет «выйти» из незавершенного проекта.

Очевидно, максимальное количество партий, которое осталось сыграть Пете и Маше, равно пяти (либо Петя выиграет три раза, а Маша - два раза, либо Маша выиграет один раз, а Петя - четыре раза). Поэтому событие, заключающееся в выигрыше Пети (а значит, проигрыше Маши), состоит в том, что Маша из пяти партий не выиграет ни одной или выиграет всего одну. Поэтому вероятность выигрыша Пети равна вероятности того, что в пяти испытаниях Бернулли, в каждом из которых успех интерпретируется как выигрыш Машей очередной партии (т.е. вероятность успеха в каждом испытании составляет $p=\frac{1}{3}$), наступит 0 или 1 успех:

$$P\{\textit{выигрыш Пети}\}=P\{0\ \textit{или}\ 1\ \textit{выигрыш Маши из}\ 5\ \textit{партий}\}=$$
$$=P_5(0)+P_5(1)=C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{5}\right)^5+C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{5}\right)^4=\frac{112}{243}.$$

При этом

$$P\{\textit{выигрыш Маши}\}=P\left\{\overline{\{\textit{выигрыш Пети}\}}\right\}=$$
$$=1-P\{\textit{выигрыш Пети}\}=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}.$$

Поэтому в данном случае победу должны были присудить Маше.

Пример (Задача Банаха). Известный математик Стефан Банах всегда носил с собой две коробки спичек, в каждой из которых первоначально было n спичек. Каждый раз, когда он хотел зажечь спичку, Банах доставал наугад одну из коробок. Найти вероятность того, что когда он в первый раз вынимал пустую коробку, в другой коробке оказывалось ровно r спичек, где $r=0,1,\ldots,n$.

Решение

Спички брались всего $(2n-r)$ раз, причём n раз из коробки, оказавшейся пустой. Это соответствует n успехам в $(2n-r)$ независимых испытаниях, поэтому вероятность

$$p(A)=\frac{C_{2n-r}^{n}}{2^{2n-r}}.$$

Упражнение

Доказать формулу $np-q\le k_0\le np+p$ для наивероятнейшего числа наступления события в независимых испытаниях.

3.4. Полиномиальная схема

Более сложная схема с n независимых испытаний получается, когда при каждом испытании возможно появление одного из r попарно несовместных $A_1, A_2, ..., A_r$ исходов $(A_1 + A_2 + \cdots + A_r = \Omega)$. Пусть $p_1, p_2, ..., p_r$ – вероятности этих исходов, тогда $p_1 + p_2 + \cdots + p_r = 1.$ Пологая $P_n(m_1, m_2, ..., m_r)$ – вероятность того, что A_1 произошло ровно m_1 раз, A_2 произошло ровно m_2 раз, и т.д., A_r произошло ровно m_r раз (нетрудно убедится, что $m_1 + m_2 + \cdots + m_r = 1$) имеем

$$P_n(m_1, m_2, ..., m_r) = \frac{n!}{m_1! m_2! .... m_r!} p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} \qquad (2)$$

Формула (3) носить называние полиномиальной; описанная схема независимых испытаний с r исходами также называется полиномиальной. При $r = 2$ эта схема превращается в биномиальную схему Бернулли.

Пример. В урне содержится 8 белых, 5 красных и 2 черных шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Рассматриваются события:

$A = \{$появился следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов$\}$;

$B = \{$появилось ровно 3 белых шара$\}$;

$C = \{$появилось 3 белых шара и по одному остальных цветов; причем белые шары появились подряд$\}$.

Определить их вероятности.

Решение

Событие A соответствует полиномиальной схеме при $n = 5,\ r = 3,$ $p_1 = 8/15,\ p_2 = 5/15,\ p_3 = 2/15,$ поэтому

$$p(A) = P_5(3{,}1{,}1) = \frac{5!}{3!1!1!}\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{5}{15}\right)\left(\frac{2}{15}\right) = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3 \approx 0{,}1348.$$

Событие B соответствует полиномиальной схеме при $n = 5,\ r = 2,$ $p_1 = 8/15,\ q_1 = 7/15,$ поэтому

$$p(B) = P_5(3) = C_5^3\left(\frac{8}{15}\right)^3\left(\frac{7}{15}\right)^2 = 10\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{15}\right)^2 \approx 0{,}3304.$$

Событие C соответствует комбинированной схеме, в которой в каких-либо трех последовательных испытаниях белый шар выпал трижды, а в остальных двух испытаниях по одному разу выпали черный и красный шары, поэтому

$$p(C) = 3\cdot P_3(3)\cdot P_2(0{,}1{,}1) = 3\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^3\cdot\frac{2!}{0!1!1!}\cdot\left(\frac{8}{15}\right)^0\cdot\frac{5}{15}\cdot\frac{2}{15} \approx 0{,}0404.$$

Упражнения

1. Каждый из десяти аспирантов группы случайным образом и независимо от остальных выбирает один из четырех дней наступающей недели (понедельник, вторник, среду или четверг) для работы в библиотеке в отделе текущей периодики. Найти вероятности следующих событий:

A = (в понедельник в библиотеку явится один аспирант, во вторник - два, в среду - три, в четверг – четыре аспиранта);

B = {все десять аспирантов соберутся в библиотеке в четверг};

C = {пятеро из аспирантов появятся в библиотеке в первые два дня недели и пятеро - в следующие два дня},

D = {в понедельник в библиотеке появятся ровно три аспиранта}.

2. Два равносильных шахматиста играют матч из 12 партий. В каждой партии возможно три исхода: $\omega_1 =$ {выиграл первый игрок (проиграл второй)}; $\omega_2 =$ {ничья}; $\omega_3 =$ {выиграл второй (проиграл первый)}. Пусть

$$p(\omega_1) = p(\omega_3) = 0,2; \qquad p(\omega_2) = 1 - p(\omega_1) - p(\omega_3) = 0,6.$$

Найти вероятности следующих событий:

A = {первый игрок выиграл 3 партии, проиграл 3 партии и остальные свел вничью};

B = {один из игроков выиграл 4 партии и проиграл 3 партии};

C = {сыграно 6 результативных партий}.

3.5. Предельные теоремы в схеме Бернулли

Формула Бернулли $P_n(k) = C_n^k\ p^k\ q^{n-k}$, выражающая $P_n(k)$ через n и p в схеме Бернулли, становится неудобной при больших n: в этом случае затруднение вызывает вычисление C_n^k.

3.5.1. Существует удобный в практическом отношении способ вычисления вероятностей $P_n(k)$ - приближенный, но достаточно точный при больших n. Его описание дано в следующей теореме.

Теорема 2 (локальная теорема Муавра - Лапласа). При больших значениях n в схеме Бернулли справедливо приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\ \varphi(x), \tag{3}$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, а $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Комментарий к теореме 2

1) Локальная теорема Муавра-Лапласа является глубоким математическим фактом, ее доказательство связано с использованием нетривиальных и тонких построений.

2) Функция $\varphi(x)$, упоминаемая в теореме, табулирована: таблицы значений этой функции приведены в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция четная; ее график называется нормальной или гауссовой кривой и изображен на рис. 3.

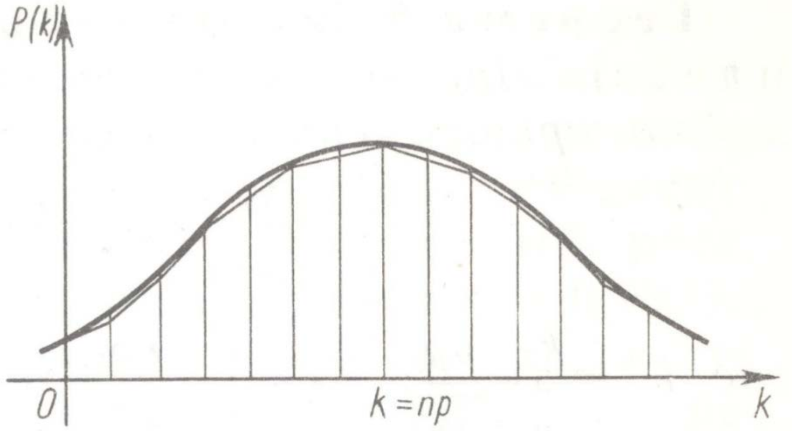


Рис. 3

3) Заметим, что $P_n(k)$ стремится к нулю при $n \to \infty$. Наибольшая из вероятностей $P_n(k)$ достигается при $k \approx np$ (k - ближайшее к np целое число). В этом случае

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты герб выпадет: а) ровно 50 раз; б) ровно 60 раз.

Решение

а) Здесь $n=100$, $k=50$, $p=0,5$, $q=0,5$. Используя формулу (1), получим

$$P_{100}(50) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot 0,5}}\varphi(x) = \varphi(x)\cdot\frac{1}{5}, \text{ где } x = \frac{50-0,5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0,5\cdot 0,5}} = 0.$$

Следовательно, $P_{100}(50) = \frac{1}{5}\cdot\varphi(0) = \frac{1}{5}0,3989 = 0,079$ (значение $\varphi(0)$ найдено по таблице).

б) Аналогично находим $P_{100}(60) = \frac{1}{5}\varphi(x)$, где $x = \frac{60-0,5\cdot 100}{\sqrt{100\cdot 0,\cdot 0,5}} = \frac{10}{5} = 2.$

Таким образом, $P_{100}(60) = \frac{1}{5}\varphi(2) = \frac{1}{5}$ 0,0540 = 0,0108.

Пример. Строительная фирма для привлечения инвестиций в строительство нового дома собирается воспользоваться банковским кредитом. Вероятность того, что какой-либо банк в ответ на поступление бизнес-плана примет положительное решение о кредитовании фирмы, равна 0,3. Строительная фирма обратилась в 100 банков. Найти вероятности того, что решения о предоставлении кредитов этой фирме примут: а) один банк; б) 15 банков; в) 30 банков; г) 50 банков.

Решение

Данную ситуацию можно рассматривать как серию из $n = 100$ испытаний Бернулли, в которых появления события в каждом испытании считается принятие банком решения о кредитовании. Вероятность появления события в единичном испытании равна по условию $p = 0,3$. Поскольку число испытаний n велико можно воспользоваться локальной теоремой Муавра – Лапласа.

$$P_{100}(1) \approx \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}} \cdot \varphi\left(\frac{1 - 100 \cdot 0,3}{\sqrt{100 \cdot 0,3 \cdot 0,7}}\right) = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \varphi\left(\frac{1-30}{\sqrt{21}}\right) =$$

$$= 0,22 \cdot \varphi(-6,33) \approx 0,22 \cdot 0 = 0;$$

$$P_{100}(15) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \varphi\left(\frac{15-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22\varphi(-3,27) \approx 0,22 \cdot 0,0020 = 0,00044;$$

$$P_{100}(30) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \varphi\left(\frac{30-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(0) \approx 0,22 \cdot 0,03989 = 0,088;$$

$$P_{100}(50) \approx \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \varphi\left(\frac{50-30}{\sqrt{21}}\right) = 0,22 \cdot \varphi(4,36) \approx 0,22 \cdot 0 = 0.$$

Упражнение

Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0,25. Найти вероятность того, что в серии из 300 испытаний успех наступит ровно 75 раз.

Из формулы (3) вытекает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с графиком функции $f = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}$, где $x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$, k -целое число. Это означает, что график функции $P_n(k)$ приближенно совпадает с гауссовской кривой $y = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, сдвинутой вправо на np и сжатой по вертикали в $\sqrt{npq}$ раз. При этом график $P_n(k)$ обладает характерной чертой - наличием пика в точке $k \approx np$ (рис. 3). В учебниках по теории вероятностей можно встретить более строгую формулировку локальной теоремы Муавра - Лапласа.

3.5.2. Вычисление вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ в схеме Бернулли по формуле $P_n(k)=C_n^k\ p^k=q^{n-k}$ при больших n является еще более затруднительным, чем использование формулы Бернулли для вычисления $P_n(k)$. Заметим, что в практическом отношении вероятности $P_n(k_1,k_2)$ имеют большее значение, чем $P_n(k)$. Действительно, при больших n часто бывает не столь существенным знать то обстоятельство, что событие A произойдет ровно k раз, но важно знать, что количество наступлений этого события будет находиться в заданных пределах. Так, при проверке семян на всхожесть не столь важно знать, что из выбранных 1000 семян ровно 907 окажутся всхожими, но важно знать, что всхожесть семян находится в пределах от 900 до 950.

Как отмечалось выше, вероятности $P_n(k)$ при больших n малы. Вероятности $P_n(k_1,k_2)$ могут быть сколь угодно близки к единице.

Удобный приближенный способ вычисления вероятностей $P_n(k_1,k_2)$ в схеме Бернулли дает следующая теорема.

Теорема 3 (интегральная теорема Муавра - Лапласа). При больших значениях n в схеме Бернулли имеет место приближенное равенство

$$P_n(k_1,k_2)\approx\Phi\left(k_2^/\right)-\Phi\left(k_1^/\right), \tag{4}$$

где $k_1^/=\dfrac{k_1-np}{\sqrt{npq}}$, $\quad k_2^/=\dfrac{k_2-np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$.

Комментарий к теореме 3.

1) Функция $\Phi(x)$ называется функцией Лапласа; она табулирована. Таблицы функции $\Phi(x)$ даны в каждом учебнике по теории вероятностей. Эта функция нечетная.

2) Отметим, что

$\Phi(x)=0$, $\Phi(1)=0{,}3413$, $\Phi(2)=0{,}4772$, $\Phi(3)=0{,}4986$, $\Phi(\infty)=0{,}5$.

Таким образом, если в формуле (4) положить $k_2^/=3$, $k_1^/=-3$, то получим $P_n(k_1,k_2)=0{,}9973$.

Существует более строгая формулировка интегральной теоремы Муавра - Лапласа.

Пример. Вычислить вероятность того, что при 100-кратном бросании монеты количество гербов будет находиться в следующих пределах:

а)[45;55]; б) [40;60]; в)[35;65].

Решение

Здесь $p=0,5$, $q=0,5$, $n=100$, $\sqrt{npq}=\sqrt{100.0,5.0,5}$ =5.

а) $k_1^/$ = $\dfrac{45-50}{5}$=-1, $k_2^/=\dfrac{55-50}{5}$ =1; P_{100} (45,55) ≈ Φ(1) - Φ(-1) = 2Φ(1) = = 0,6826.

б) $k_1^/$ = $\dfrac{40-50}{5}$= -2, $k_2^/$ = $\dfrac{60-50}{5}$ =2; P_{100} (40,60) ≈ Φ(2)-Φ(-2) = 2Φ(2) = = 0,9545.

в) $k_1^/=\dfrac{35-50}{5}$= -3; $k_2^/=$ $\dfrac{65-50}{5}$ =3; P_{100} (35,65) ≈ Φ(3)-Φ(-3) = 2Φ(3) = = 0,9973.

Из результатов вычислений видно, что вероятности рассматриваемых событий достаточно велики, в особенности последняя вероятность, равняя 0,9973.

События, имеющие большую вероятность, называются практически достоверными.

В этом случае считается, что в результате опыта событие обязательно наступит. Насколько должна быть велика вероятность, чтобы событие считать практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверным? Это зависит от характера задачи: во всякой задаче замена случайного события практически достоверным содержит «элемент риска». Ясно, что в различных условиях допустимый риск различен. Все же часто останавливаются на вероятности 0,9973. Мы также примем за определение практически достоверного события такое случайное событие, вероятность которого не меньше, чем 2Φ(3)= 0,9973.

3.5.3. Рассмотрим схему Бернулли с большим количеством n испытаний; обозначим через σ число $\sqrt{npq}$. Из интегральной теоремы Муавра - Лапласа вытекает, что

$$P_n\left(np-3\sigma,\ np+3\sigma\right)=0,9973. \qquad (3)$$

Действительно, при $k_1=np-3\sigma$, $k_2=np+3\sigma$ имеем $k_1^/=-3=$ -3, $k_2^/$ = 3 и

$$P_n(k_1,k_2)\approx Φ(3) - Φ(-3) = 2Φ(3) = 0,9973.$$

Формула (3) позволяет для каждой схемы Бернулли указать интервал $\left(k_1,\ k_2\right)$ такой, что количество наступлений события A принадлежит этому интервалу с вероятностью 0,9973; иными словами, событие $k_1 \le m < k_2$ ***практически достоверно.*** Формула (3) называется правилом «трех сигм», а интервал (k_1, k_2), где $k_1 = np - 3\sqrt{npq}$, $k_2 = np + 3\sqrt{npq}$ - трехсигмовым интервалом.

Заметим, что трехсигмовый интервал оказывается удивительно узким. Если любому здравомыслящему человеку, не знакомому с теорией вероятностей, предложить угадать интервал, в который с практической достоверностью попадет количество наступлений событий при последовательных испытаниях, то, как правило, в ответе будет дан гораздо более широкий интервал.

Пример. Некоторая система состоит из 10000 (независимых) элементов. Вероятность выхода из строя одного элемента равна 0,5. Пусть n — количество вышедших из строя элементов системы. Найти трехсигмовый интервал.

Решение. Имеем n =10000, $p = 0{,}5$, $q = 0{,}5$ $\sigma = \sqrt{10000.0{,}5.0{,}5} = 50$, $k_1 = np - 3\sigma$ = 5000 -150, $k_2 = np + 3\sigma$ = 5000+150. Итак, с вероятностью 0,9973 можно утверждать, что количество вышедших из строя элементов находится в пределах 5000+150 (событие ***практически достоверное***).

В частности, если взять запас в 5000 элементов для замены вышедших из строя, то в 50% случаев этого запаса не хватит. Если же увеличить этот запас всего на 3%, т. е. взять 5150 элементов, то его хватит наверняка (т. е. с вероятностью большей, чем 0,9973). Оценка трехсигмового интервала этого примера «на глаз», «по здравому смыслу» приводит, как правило, к большому преувеличению истинного значения.

С помощью интегральной теоремы Муавра - Лапласа можно пояснить, почему и в каком смысле вероятность p события A в одном испытании совпадает (приближенно) с частотой $\frac{m}{n}$ наступления события A в n испытаниях. Действительно, с вероятностью 0,9973 выполняется неравенство $np - 3\sqrt{npq} \le m < np + 3\sqrt{npq}$, откуда после деления всех его частей на n получим

$$p - 3\sqrt{\frac{pq}{n}} \le \frac{m}{n} < p + 3\sqrt{\frac{pq}{n}} \ .$$

Так как $3\sqrt{\frac{pq}{n}} \to \infty$ при $n \to \infty$, то частота $\frac{m}{n}$ с практической достоверностью при больших n так угодно мало отличается от p.

Следствие. Вообще говоря, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа легко можно получить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в n независимых испытаниях в более общем случае, т.е. формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0{,}1$. Найти вероятность того, что среди случайно отобранных 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение. По условию $n=400$; $p=0{,}1$; $q=0{,}9$; $\varepsilon=0{,}03$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)$.

Пользуясь формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

имеем:

$$P\left(\left|\frac{m}{400}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)\approx 2\Phi\left(0{,}03\sqrt{\frac{400}{0{,}1\cdot 0{,}9}}\right)=2\Phi(2).$$

По таблице значений функции Лапласа находим $2\Phi(2)=0{,}9544$.

Итак, искомая вероятность приближенно равна 0,9544.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей в каждой, то примерно в 95,44% этих проб отклонение относительной частоты от постоянной вероятности $p=0{,}1$ по абсолютной величине не превысит 0,03.

Пример. Вероятность того, что деталь не стандартна, $p=0{,}1$. Найти, сколько деталей надо отобрать, чтобы с вероятностью равной 0,9544 можно было утверждать, что относительная частота появления нестандартных деталей (среди отобранных) отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более, чем на 0,03.

Решение

По условию

$$p=0{,}1;\quad q=0{,}9;\quad \varepsilon=0{,}03;\ P\left(\left|\frac{m}{n}-0{,}1\right|\le 0{,}03\right)=0{,}9544.$$

Требуется найти n.

Воспользуемся формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|\le\varepsilon\right)\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

В силу условия,

$$2\Phi\left(0,03\sqrt{\frac{n}{0,1\cdot 0,9}}\right)=2\Phi\left(0,1\sqrt{n}\right)=0,9544.$$

Следовательно, $\Phi\left(0,1\sqrt{n}\right)=0,4772=$ 0,4772. По таблице значений функции Лапласа находим

$$\Phi(2)=0,4772 .$$

Для отыскания числа n получаем уравнение

$$0,1\sqrt{n}=2.$$

Отсюда искомое число деталей $n=400$.

Смысл полученного результата таков: если взять достаточно большое число проб по 400 деталей, то в 95, 44% этих проб относительная частота появления нестандартных деталей будет отличаться от постоянной вероятности $p=0,1$ по абсолютной величине не более, чем на 0,03, т.е. относительная частота будет заключена в границах от 0,07 (0,1 - 0,03 = 0,07) до 0,13 (0,1 + 0,03 = 0,13).

Другими словами, число нестандартных деталей в 95,44% проб будет заключено от 28 (7% от 400) до 52 (13% от 400).

Если взять лишь одну пробу из 400 деталей, то с большой уверенностью можно ожидать, что в этой пробе будет нестандартных деталей не менее 28 и не более 52. Возможно, хотя и маловероятно, что нестандартных деталей окажется меньше 28, либо больше 52.

Более строгая формулировка утверждения о близости частоты и вероятности дана в теореме Бернулли (один из вариантов закона больших чисел), которую рассмотрим в одном из последующих параграфах.

3.5.4. Представляет интерес схема Бернулли с малой вероятностью p появления события A в одном испытании и с большим количеством n испытаний. Пусть при большом n малая вероятность p такова, что $np=\lambda$, где λ - некоторое число. Вероятность $P_n(k)$ в такой схеме Бернулли описывается следующей теоремой.

Теорема 4 (теорема Пуассона). Пусть $n\to\infty$, λ>0 постоянно и $p=\dfrac{\lambda}{n}$.

Тогда в схеме Бернулли из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p, имеет место приближенное равенство

$$P_n(k) = P(k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (4)$$

Комментарий к теореме 3. Обратим внимание на следующее обстоятельство: вероятность наступления события A ровно k раз не зависит от n, что выглядит неправдоподобно. Это можно объяснить так. Пусть n велико; увеличивая n в μ раз и уменьшая p во столько же раз (так что np не изменяется), мы в самом деле имеем $P_n(k, p) \approx P_{\mu n}\left(k, \frac{p}{\mu}\right)$. Таким образом, независимость вероятности рассматриваемого события от n объясняется тем, что она вычислена в разных схемах Бернулли.

Теорему примем без доказательства.

Пример. Учебник издан тиражом 100000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.

Решение. По условию, $n = 100000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся формулой (4). Найдём $\lambda = np = 100000 \cdot 0{,}0001 = 10$. Тогда

$$P_{100000}(5) = e^{-10} \frac{10^5}{5} = 10^5 \cdot \frac{0{,}000045}{120} = 0{,}0375.$$

Пример. На лекции по теории вероятностей присутствует 200 человек. Вероятность того, что день рождения случайно выбранного студента приходится на определённый день года, составляет 1/36. Найти вероятность того, что один человек из присутствующих родился 1 января, и два человека родились 8 марта.

Решение

Пусть событие A состоит в том, что случайно выбранный студент родился 1 января, событие N - в том, что k человек из 200 родились 1 января. Тогда по условию $p = P(A) = \frac{1}{365}$. Предположим, что опрос $n = 200$ студентов относительно даты их рождения удовлетворяет условиям, которые накладываются на испытания Бернулли, в каждом из которых событие A может наступить, а может и не наступить. Тогда, поскольку $n = 200$ велико, а произведение $np=\frac{200}{365}=0,548$, для подсчёта вероятности события N можно воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{200}(k)\approx e^{-0,548}\frac{(0,548)^k}{k!}$$

и при $k=1$ получаем

$$P_{200}(k)\approx e^{-0,548}(0,548)=0,317.$$

Пусть событие M - в том, что m человек из 200 родились 8 марта. Тогда в соответствии с формулой умножения вероятностей, $p(NM)=p(N)p_N(M)$, где $p_N(M)=P_{n-k}(m)$- вероятность того, что из $(n-k)$ студентов m родились 8 марта. Так как число $(n-k)=200-1=199$ велико, а $(n-k)p=\frac{198}{365}=0,542$, для расчёта вероятности события M можно вновь воспользоваться формулой Пуассона

$$P_{n-k}(m)\approx e^{-0,542}\frac{(0,542)^m}{m!}.$$

При $n=200$, $k=1$, $m=2$ получаем

$$p_N(M)=P_{199}(2)=e^{-0542}\frac{(0,542)^2}{2}=0,086,$$

поэтому искомая вероятность $p(NM)=0,317\cdot 0,086=0,027.$

Упражнения

1. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что число родившихся 1 января и 8 марта не больше двух.

2. Владельцы кредитных карт ценят их и теряют весьма редко - вероятность потерять кредитную карту в течение недели для случайно выбранного вкладчика составляет 0,001. Банк выдал кредитные карты 2000 клиентам. Найти: а) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна ровно одна кредитная карта; б) вероятность того, что за предстоящую неделю будет утеряна хотя бы одна кредитная карта; в) наиболее вероятное число кредитных карт, теряемых за месяц.

Вопросы для самопроверки

1. Приведите интуитивное определение случайного события? Приведите примеры случайных событий.

2. Дайте определения достоверного и невозможного событий. Какими символами они обозначаются?

3. Когда события называют несовместными?

4. Какие события называют равновозможными?

5. Какое случайное событие называется массовым или статистическим? Чем отличаются массовые случайные события от единичных?

6. Чем занимается теория вероятностей?

7. С каким понятием связано точный смысл основных понятий теории вероятностей, в том числе, понятия «случайного события»?

8. Каково должно быть строгое математическое понятие «случайного события»?

9. Из чего состоит всякий случайный опыт (эксперимент, испытание)?

10. Что означает воспроизводимый опыт?

11. Что может быть предметом наблюдения в том или ином опыте?

12. Что означает понятие «наблюдаемый результат» для реально воспроизводимого опыта?

13. Как интерпретируется любой наблюдаемый результат?

14. Что понимают под понятием пространства (множества) элементарных исходов?

15. Как интерпретируется любое подмножество пространства (множества) элементарных исходов?

16. Из чего состоит поле событий для данного опыта?

17. Исходя из теоретико-множественного похода разъясните понятие события; достоверного, невозможного событий и двух совместных (несовместных) событий.

18. Какую структуру может иметь множество Ω - пространство элементарных исходов? Прокомментируйте возможные варианты этого множества.

19. На практике исходя из какого требования осуществляется построение множества Ω?

20. Когда строго не определяемое понятие «элементарный исход» становится более определенным понятием?

21. Введите операции суммы, произведения событий и понятия противоположного события исходя из теоретико-множественного подхода к понятию события.

22. Что называется алгеброй событий?

23. Дайте классическое определение вероятности события.

24. Что называется классической схемой или схемой урн?

25. Сформулируйте два универсальных правила, применяемых при решении комбинаторных задач.

26. Что называется факториалом натурального числа l?

27. Когда множество, состоящее из k элементов называется упорядоченным?

28. Что называются размещениями из l элементов по k? Чему равно число размещений из l элементов по k?

29. Что называются перестановками из l элементов размещения из l элементов по l? Чему равно число перестановок из l элементов?

30. Что называются сочетаниями из l элементов по k?

31. Что называются размещениями с повторениями из l элементов по k? Чему равно число размещений с повторениями из l элементов по k?

32. Что называются сочетаниями с повторениями из l элементов по k? Чему равно число сочетаний с повторениями из l элементов по k?

33. Если во множестве S, состоящие из l элементов, есть только r различных элементов, то что называются перестановками с повторениями из l элементов? Чему равно число перестановок с повторениями из l элементов в данном случае?

34. Существуют две принципиально различные схемы выбора. Разъясните эти схемы.

35. Прокомментируйте четыре различные постановки опыта по выбору наудачу k элементов из общего числа l различных элементов множества.

36. Разъясните статистический подход к понятию вероятности. Что лежит в основе этого подхода?

37. В каких случаях целесообразно применить статистическое определение вероятности?

38. Что называется вероятностью события в строго математическом смысле? Укажите главные черты строгого определения понятия вероятности, которая развивает идею конечного пространства элементарных событий.

39. Разъясните понятие «геометрическая вероятность». Почему геометрическая вероятность считают наглядным примером вероятностной модели?

40. Сформулируйте аксиомы 1-3, которые составляют основу всей теории вероятностей.

41. Все теоремы теории вероятностей, включая самые сложные, выводятся из аксиомы 1-3 формально-логическим путем. Укажите несколько примеров такого вывода.

42. Дайте определения независимости (зависимости) одного события от другого.

43. Что называется условной вероятностью и как она обозначается?

44. Приведите теорема умножения вероятностей

45. Можно ли утверждать: - « Если случайное событие B не зависит от A, то и A не зависит от B».

46. Как поступают в практических вопросах для установления независимости одного события от другого?

47. Когда несколько событий называют попарно независимыми? Приведите примеры.

48. Когда несколько событий называют независимыми в совокупности? Приведите примеры.

49. Если несколько событий независимы попарно, то следует ли отсюда их независимость в совокупности?

50.Привести пример, показывающий, что из попарно независимости событий A, B, C не следует их независимость в совокупности.

51. Приведите обобщенная теорема умножения вероятностей.

52. Дайте определения полной группы событий. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

53. Приведите другое определение противоположных событий с помощью понятия полной группы событий.

54. Сформулируйте теорему о полной вероятности. Прокомментируйте эту теорему.

55. Сформулируйте теорему Байеса. Прокомментируйте эту теорему.

56. Почему теорем полной вероятности и Байеса (или гипотез) считают следствием теорем сложения и умножения вероятностей?

57. Что называется схемой Бернулли?

58. Приведите примеры последовательности испытаний, которые не образуют схему Бернулли.

59. Какие задачи рассматриваются в связи со схемой Бернулли?

60. Сформулируйте теорему Бернулли.

61. На чем основывается доказательство теоремы Бернулли?

62. Что называется наивероятнейшим числом?

63. В чем заключаются затруднения, возникающие при вычислении вероятностей в схеме Бернулли при больших n?

64. Сформулируйте локальную теорему Муавра-Лапласа. Приведите свойства функции $\varphi(x)$, которая упоминается в этой теореме.

65. Исходя из локальной теоремы Муавра-Лапласа прокомментируйте поведения вероятностей $P_n(k)$, при $n \to \infty$ и $k \approx np$.

66. Напишите вид гауссовской функции.

67.В чем заключается сходство функции $P_n(k)$ и гауссовской функции?

68.Сформулируйте интегральную теорему Муавра-Лапласа.

69. Как называется функция $\Phi(x)$, упоминаемая в интегральной теореме Муавра-Лапласа? Назовите ее свойства.

70.Что представляет собой «трехсигмовый интервал»?

71. Сформулируйте теорему Пуассона. Прокомментируйте теорему.